

Mécanique du point. Agrégation

Ph. Ribière

Samedi 03 octobre 2009

Chapitre 1

Cinématique du point.

La mécanique dite classique (non relativiste et non quantique) est née au XVII^{ème} siècle. Au début du siècle, Galilée s'intéresse au mouvement des objets mais sans en étudier la cause : il crée la cinématique. Et à la fin du siècle, Newton étudie les causes du mouvement : il développe pour cela, en parallèle avec Leibniz, le calcul différentiel. Il énonce les principes fondamentaux aussi appelés trois lois de Newton. La mécanique classique est aussi appelé mécanique newtonienne pour rendre hommage à son fondateur. Il étudie aussi la gravité. (La légende dit que Newton aurait compris la loi de la gravité en observant la chute de la pomme mais c'est un conte).

Nous allons établir les principes fondamentaux de la mécanique newtonienne. Nous verrons comment établir les équations différentielles du mouvement, et comment les résoudre, exactement comme en électrocinétique. Puis nous nous intéresserons au point de vue énergétique.

Définition : la cinématique est la description du mouvement d'un point indépendamment des causes qui lui donnent naissance.

Dans cette partie, nous nous contenterons d'étudier un système ponctuel.

Exemple : mouvement de la balle de tennis mais sans tenir compte des effets éventuels, mouvement de la lune par rapport au soleil mais sans tenir compte de sa rotation propre.

1.1 Le référentiel.

Pour décrire le mouvement du point, il faut décrire la trajectoire du point, donc sa position $M(t)$ dans l'espace.

1.1.1 L'espace.

Pour repérer la position du point dans l'espace, il faut décrire sa position par rapport à un point fixe O . Décrire la trajectoire revient donc à définir **le vecteur position** \overrightarrow{OM} .

1.1.2 Le temps.

En mécanique classique, le temps est supposé absolu, il s'écoule de la même manière pour tous les observateurs.

C'est une des hypothèses de la mécanique classique qui sera remise en cause par la suite, dans le cadre d'une théorie plus générale, la théorie de la relativité. (Einstein, 1905.)

1.1.3 Le référentiel.

Définir la position et l'instant d'origine revient à dire par quel "observateur" ou quels références le mouvement est étudié. Cette "observateur" est, en mécanique, le référentiel.

Un référentiel en mécanique classique est défini par rapport à un objet. L'observateur se place à côté de cet objet pour étudier le mouvement.

1.2 La trajectoire et base de projection.

Définition : la trajectoire est le lieu des points (la courbe) décrite par le point M en fonction du temps dans un référentiel donné.

L'espace est l'espace tridimensionnel qui nous entoure.
Pour décrire le mouvement d'un point dans l'espace, il faut donc trois coordonnées : les trois coordonnées du vecteur position $\vec{OM}(t)$ sur trois vecteurs de projections.

1.2.1 La base cartésienne.

Les bases de projections :

Pour décrire le mouvement d'un point $\vec{OM}(t)$, il faut le projeter sur un système d'axe, si possible **adapté au mouvement**.

Pour décrire la trajectoire, on a recours aux équations paramétriques de la courbe, $(x(t), y(t), z(t))$ en coordonnées cartésienne.

Projection sur un système de 3 axes portés par un trièdre directe $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

M (x, y, z) soit $\vec{OM}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z$.

Envisageons un déplacement élémentaire ou infinitésimale \vec{OM} durant un intervalle de temps, lui aussi élémentaire, dt . Par définition,

$$d\vec{OM} = \vec{OM}(t + dt) - \vec{OM}(t) = \vec{OM}(x + dx, y + dy, z + dz) - \vec{OM}(x, y, z)$$

$$\vec{OM} = dx\vec{u}_X + dy\vec{u}_Y + dz\vec{u}_Z.$$

Ici, les vecteurs de la base ($\vec{u}_X, \vec{u}_Y, \vec{u}_Z$) ne dépendent pas du point M, c'est donc le cas le plus simple.

Définition : la vitesse est la dérivée du vecteur position par rapport au temps.

$$\vec{v}|_R = \frac{d\vec{OM}}{dt}|_R \text{ en m.s}^{-1}.$$

Propriété : la vitesse est portée par la tangente à la trajectoire.

Compte tenu des expressions précédentes, il est facile de trouver l'expression de la vitesse dans le système de coordonnées cartésiennes.

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z.$$

Définition : l'accélération est la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps, soit la dérivée seconde du vecteur position par rapport au temps.

$$\vec{a}|_R = \frac{d\vec{v}}{dt}|_R = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}|_R \text{ en m.s}^{-2}.$$

Dans le système de coordonnées cartésiennes.

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z$$

1.2.2 La base cylindrique ou polaire

. Cette base est une base **locale, mobile**, elle est liée du point M, ($\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$).

M ($r(t), \theta(t), z(t)$) soit $\vec{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$.

La dépendance en θ est "cachée" dans le vecteur \vec{u}_r . Quand t varie, $\theta(t)$ varie et donc \vec{u}_r aussi.

$$d\vec{OM} = dr.\vec{u}_r + r.d\vec{u}_r + dz.\vec{u}_z.$$

\vec{u}_r dépend de l'angle θ . D'où $d\vec{u}_r = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta}d\theta = d\theta.\vec{u}_\theta$ (démonstration en repassant par la base cartésienne $\vec{u}_r = \cos(\theta)\vec{u}_x + \sin(\theta)\vec{u}_y$).

Finalement, $d\vec{OM} = dr.\vec{u}_r + r.d\theta.\vec{u}_\theta + dz.\vec{u}_z$.

$$\text{D'où } \vec{v} = \dot{r}.\vec{u}_r + r.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta + \dot{z}.\vec{u}_z.$$

$$\text{Et } \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2).\vec{u}_r + (2.\dot{r}.\dot{\theta} + r.\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}.\vec{u}_z.$$

Il est important de retenir :

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}.\vec{u}_\theta \text{ et } \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}.\vec{u}_r$$

Remarque : cette base est aussi appelée base polaire dans le plan ($\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$).

1.2.3 La base sphérique

. Cette base est une base **locale, mobile**, elle est liée du point M, $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$.
 M $(r(t), \theta(t), \varphi(t))$ soit $\vec{OM} = r\vec{u}_r$.
 La dépendance en θ et φ est caché dans le vecteur \vec{u}_r . Quand t varie, θ et φ varient et donc \vec{u}_r aussi.

$$d\vec{OM} = dr.\vec{u}_r + r.d\vec{u}_r = dr.\vec{u}_r + r.d\theta.\vec{u}_\theta + r \sin(\theta)d\varphi.\vec{u}_\varphi.$$

$$D'où \vec{v} = \dot{r}.\vec{u}_r + r.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta + r \sin(\theta)\dot{\varphi}.\vec{u}_\varphi.$$

Et $\vec{a} = ???$ Une expression compliquée...

1.3 Application au mouvement circulaire.

Définition : le mouvement est circulaire si le support du mouvement est un cercle.

Il s'agit donc d'un mouvement plan : deux coordonnées suffisent à décrire le mouvement. Il est dans ce cas judicieux d'avoir recours aux coordonnées cylindriques, appelées coordonnées polaires dans ce cas.

Dans le cas du mouvement circulaire, plutôt que de reprendre la formule générale vue ci avant, il est plus aisée de refaire le raisonnement dans ce cas particulier.

$\vec{OM} = R\vec{u}_r$ avec R constant (le rayon du cercle).

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = R.\frac{d\vec{u}_r}{dt} = R\dot{\theta}.\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = R\frac{d\dot{\theta}}{dt}\vec{u}_\theta + R\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = R\ddot{\theta}.\vec{u}_\theta - R\dot{\theta}^2.\vec{u}_r$$

Intéressons nous au mouvement circulaire uniforme.

Le mouvement est uniforme signifie que le module du vecteur vitesse est constant, donc $R\dot{\theta} = cste$ d'où $\dot{\theta} = \omega$ la vitesse de rotation angulaire en $rad.s^{-1}$ est constante.

Notez que le vecteur vitesse n'est pas constant car sa direction change, il reste toujours tangent à la trajectoire.

Dans ce cas, dans la calcul ci dessus, le terme en $\ddot{\theta}$ de l'accélération est nulle et finalement :

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2.\vec{u}_r.$$

Remarque importante : Il existe une accélération non nul pour le mouvement circulaire uniforme. Cette accélération permet de modifier la direction de la vitesse, sans quoi le mouvement serait rectiligne uniforme.

1.4 Exercices.

1.4.1 Exercice de cours : le mouvement hélicoïdal.

On considère le mouvement dont les équations horaires sont dans le système de coordonnées cartésiennes :

$$x(t) = r_0 \cos(\omega t)$$

$$y(t) = r_0 \sin(\omega t)$$

$$z(t) = h\omega t$$

1. Donner la dimension de r_0 , de h et de ω .
2. Montrer que le projeté orthogonal de M dans le plan Oxy décrit un cercle.
3. Calculer la vitesse et l'accélération dans le système de coordonnées cartésiennes.
4. Déterminer les équations horaires du mouvement en coordonnées cylindriques.
5. Calculer la vitesse et l'accélération dans le système de coordonnées cylindriques.
6. Calculer la norme de la vitesse et de l'accélération dans les deux systèmes. Que remarquez vous ?
7. Tracer l'allure de la trajectoire.

1.4.2 Vrai/Faux du cours.

1. Pour un mouvement rectiligne uniformément accéléré sans vitesse initiale, partant de l'origine 0, le mouvement peut être décrit par l'équation horaire suivant $z(t) = A\frac{t^2}{2}$.
2. Dire que le vecteur vitesse est constant revient à dire que le mouvement est uniforme.
3. En coordonnées cylindrique la dérivé du vecteur \vec{u}_r par rapport au temps est $\dot{\theta}\vec{u}_\theta$.
4. Si la norme du vecteur vitesse est constant, alors nécessairement l'accélération est nulle.

1.4.3 Accélération subie par le corps.

Un homme ne peut pas supporter des accélérations de plus de $10g=89,1 \text{ m.s}^{-2}$.

1. Un avion est lancé à 2500 km/h. Calculer le rayon de sa trajectoire circulaire dans le ciel pour effectuer un demi tour en conservant la même altitude pour que pilote ne subissent pas une accélération trop forte.
2. A titre de comparaison, calculer l'accélération que vous subissez dans un manège dont le bras est de 10m et qui effectue un tour toutes les 10 secondes.

Réponse : $2R \simeq 10000 \text{ m}$.

1.4.4 La course de voiture.

Deux voitures sont alignés sur une même ligne de départ. Le départ de la course est donné... Alain, le pilote de la voiture A, réagit après $\tau_A = 1\text{s}$ et sa voiture accélère avec une accélération constante \vec{a}_A tel que $|\vec{a}_A| = 3\text{m.s}^{-2}$. Bill, le pilote de la voiture B, peu concentré, réagit lui après $\tau_B = 3\text{s}$ mais sa voiture plus puissante accélère avec une accélération constante \vec{a}_B tel que $|\vec{a}_B| = 4\text{m.s}^{-2}$. On observe en outre que les voitures avancent en ligne droite.

1. Qualitativement, si la piste de course est courte, qui gagne ? Et si elle est longue ?
2. Calculer le temps et la distance au bout duquel Bill rattrape Alain.

1.4.5 Mouvement à accélération centrale.

Un mouvement est dit à accélération central si $\forall M, O\vec{M} \wedge \vec{a}_M = \vec{0}$, ce qui signifie que l'accélération est toujours dirigé vers un point fixe O. ($O\vec{M}$ et \vec{a}_M sont donc colinéaires.)

On définit alors $\vec{c} = O\vec{M} \wedge \vec{v}_M$.

1. Montrer que \vec{c} est une constante. Que pouvez vous en conclure ?
2. Donner l'expression de \vec{c} en fonction des coordonnées cylindriques.
3. On pose $u = \frac{1}{r}$. Calculer \vec{v} et \vec{a} en fonction de c , u et $\frac{du}{d\theta}$

Réponse : 1. $\frac{d\vec{c}}{dt} = \vec{0}$ mvt plan 2. $\vec{c} = r^2\dot{\theta}\vec{u}_z$ 3. $\vec{v} = -c\frac{du}{d\theta}\vec{u}_r + cu\vec{u}_\theta$ et $\vec{a} = -c^2u^2(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u)\vec{u}_r$

Chapitre 2

La dynamique du point dans un référentiel galiléen.

Au premier chapitre, nous avons appris à décrire le mouvement d'un point.

L'objectif est maintenant de comprendre son évolution et prévoir son comportement futur :

- Si je laisse tomber la craie, au bout de combien de temps touchera-t-elle le sol? Eclatera-t-elle?
- Comment, à partir du mouvement du balancier de l'horloge, peut on mesurer le temps?
- Quelle est le mouvement d'un satellite qui se place sur orbite?
- Quel est le coefficient de marée aujourd'hui?

2.1 Masse et quantité de mouvement.

2.1.1 La masse.

Nécessité de la masse :

Je suis capable de lancer la craie à 10m mais pas le poids olympique. Pourquoi? L'inertie des deux objets (le poids et la craie) ne sont pas équivalents. Il est plus difficile de mettre en mouvement le poids que la craie, le poids possède une inertie plus grande.

Pour caractériser l'inertie du système, on utilise la masse m du système. Dans le S.I., l'unité de masse est le kg.

On suppose en mécanique newtonnienne :

- La masse se conserve.
- La masse est indépendante du mouvement, elle est invariante par changement de référentiel.

Remarque : il s'agit bien d'hypothèses. En mécanique relativiste, de la "masse" peut être convertie en énergie ($E = mc^2$) lors d'une réaction : exemple fission de l'uranium.

2.1.2 La quantité de mouvement.

Pour décrire le mouvement d'un point, nous avons introduit la vitesse (et l'accélération) du point. Mais nous venons aussi de montrer qu'il fallait considérer l'inertie du point, i.e. son aptitude à être

mis plus ou moins facilement en mouvement.

Définition : la quantité de mouvement \vec{p} d'une particule de masse m et de vitesse \vec{v} dans le référentiel R est :

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Remarque : la quantité de mouvement dépend du référentiel, i.e. de l'observateur qui décrit le mouvement.

2.2 Les principes fondamentaux de la dynamique du point.

2.2.1 Première loi de Newton : principe d'inertie.

Définition : un système est dit isolé s'il ne subit aucune interaction extérieure.

Définition : un système est dit pseudo-isolé si la résultante des interactions extérieurs est nulle.

Enoncé de la première loi de Newton :

Il existe un référentiel R , appelé référentiel galiléen, dans lequel le mouvement d'un point matériel isolé est rectiligne uniforme.

Rappel : un mouvement est rectiligne uniforme ssi $\vec{v} = \vec{c}st$ ce qui signifie, premièrement, que la direction est fixe et, deuxièmement, que la norme du vecteur est fixe. (Une égalité vectorielle est très forte.)

Remarque : Le fait que la vitesse est toujours même norme est lié au fait que l'espace est homogène. Les propriétés sont les mêmes en tout point de l'espace. Et le fait que la vitesse est toujours même direction est liée à l'isotropie de l'espace. Les propriétés sont les mêmes en toutes les directions de l'espace.

Pour le moment, nous allons nous contenter du fait qu'il existe au moins un référentiel galiléen. Nous n'allons pas pour l'instant chercher à trouver un critère pour savoir si un référentiel peut être considéré comme approximativement galiléen ou non.

Dans cette première partie de la mécanique, nous allons nous intéresser essentiellement à des expériences de laboratoire (pas de satellite) et pour toutes ces expériences, nous allons donc admettre que le référentiel lié au sol est en première approximation galiléen.

Je suis un observateur solidaire du sol (pas de mouvement par rapport au sol), le référentiel est galiléen : si je pose la craie sur la table, elle ne bouge pas. (Notez que la notion de référentiel est liée à un objet, ici le sol.)

Dans les exercices, il faut prendre dès maintenant l'habitude de préciser le référentiel : " Considérons le mouvement du point M dans le référentiel du laboratoire considéré comme galiléen." Tel doit être la première phrase dans chacun des exercices. Très important.

2.2.2 La seconde loi de Newton : principe fondamental de la dynamique.

Enoncé de la seconde loi de Newton :

Considérons un point M dans le référentiel galiléen R, soumis à une force \vec{F} :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Remarque 1 : \vec{F} désigne la résultante des forces $\vec{F} = \sum \vec{f}$.

Remarque 2 : Comme m est une constante, indépendant du temps, $\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$

2.2.3 La troisième loi de Newton : principe d'action réaction.

Enoncé de la troisième loi de Newton :

Considérons deux points A et B. $\vec{f}_{A \rightarrow B}$ désigne la force de A sur B et $\vec{f}_{B \rightarrow A}$ désigne la force qu'exerce le point B sur A.

$$\vec{f}_{A \rightarrow B} = -\vec{f}_{B \rightarrow A}$$

Remarque : principe très naturel. Symétrie.

Retour sur exemple de la craie sur la table.

Mais pose des questions : si la masse d'un corps change brusquement, toutes les forces sont -elles changées instantanément ? Et le principe de relativité ?

2.3 Expression des forces usuelles.

2.3.1 Les quatre forces fondamentales : aspect culturel.

- l'interaction gravitationnelle
- l'interaction électromagnétique
- l'interaction faible
- l'interaction forte

Les deux dernières forces interviennent pour assurer la stabilité des constituants du noyau et sont donc de portée très faibles $10^{-15}m = fm$. Même pour étudier le mouvement de l'électron autour du

noyau, il n'est pas utile de les considérer.

Il ne reste donc que deux forces.

Retour sur exemple de la craie sur la table : beaucoup de force sont dues à l'interaction électromagnétique. Exemple cohésion des solides, réaction de la table sur la craie... (la gravité ne joue pas).

2.3.2 Interactions à distance

Force gravitationnelle.

Considérons deux masses ponctuelles m_1 et m_2 , distantes de r .
 $\vec{f}_{\text{gravitationnelle de } 1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$ avec $G = 6,67259 \cdot 10^{-11} SI$.

Remarque : Force attractive, d'où le signe "-".

La force de pesanteur.

Considérons une masse m au voisinage de la terre. Cet objet est soumis à l'attraction gravitationnelle de l'astre. Cette attraction est prise en compte dans le poids :¹

$$\vec{f}_{\text{pesanteur}} = m\vec{g}. \quad g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$$

Force électrostatique.

Considérons deux charges ponctuelles q_1 et q_2 , distantes de r .
 $\vec{f}_{\text{electrostatique de } 1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$ avec $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 10^{-10} SI$.

Remarque : Cette force est attractive si les charges sont de signes contraires $q_1 q_2$, répulsive sinon.

¹En PCSI, une définition exacte du poids est donnée. Dans le poids entre aussi une contribution plus faible mais non négligeable due à la rotation de la terre sur elle-même.

Force d'une particule dans un champ électromagnétique.

Considérons une particule chargée dans un champ électromagnétique extérieur : (\vec{E}, \vec{B}) .
$$\vec{f}_{Lorentz} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

2.3.3 Interactions de contact.

Comme leur nom l'indique et contrairement au cas précédent, ces actions n'existent que lorsque les objets sont en contact.

Tension du ressort

Considérons une masse m ponctuelle accrochée à un ressort :

$$\vec{f}_{ressort} = -k(l - l_0)\vec{u}.$$

Remarque. Le signe de cette expression est pertinent. Si $l > l_0$, le ressort cherche à ramener la masse.

Tension du fil

Considérons une masse m ponctuelle accrochée fil.

Remarque : cette force est nécessaire pour empêcher la masse de tomber sous l'effet du poids.

Propriété : En première année, nous admettons que le fil transmet les forces. Pensez à l'exemple du tir à la corde : le vainqueur est celui qui tire le plus fort !

La poulie.

La réaction du support sans frottement.

Réaction du support en l'absence de frottement : \vec{N} , force normale au support. Schéma

Remarque : cette force est nécessaire pour maintenir la masse en équilibre, l'empêcher de s'enfoncer dans la table.

La réaction du support avec un frottement solide dans le cas d'un contact glissant.

Considérons un objet ponctuel qui **glisse** sur un support rugueux.

Dans le cas d'un support rugueux, la réaction du support \vec{R} se décompose en deux termes : $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$ où \vec{N} est la force normale au support et \vec{T} une composante liée au **frottement solide**.

\vec{T} **s'oppose au glissement (et non pas au mouvement.)** ce qui permet de déterminer sa direction.

Dans le cas du glissement, seul cas étudié en première année, la norme de \vec{T} est donné par la loi de Coulomb : $|\vec{T}| = f|\vec{N}|$ où f désigne le coefficient de frottement solide.²

Force de frottement dans l'air.

Considérons un objet ponctuel qui se déplace dans un fluide à la vitesse \vec{v} .

Si v faible, $\vec{f}_{\text{frottement fluide}} = -\alpha\vec{v}$ où α désigne le coefficient de frottement fluide.

Remarque 1 : Cette force est en réalité valable pour des "faibles vitesses", pour des faibles Reynolds³, pour être précis. (cf. Cours de mécanique des fluides). A fort Reynolds, la force de frottement est proportionnelle à v^2 .

Remarque 2 : il ne faut en aucun cas confondre frottement fluide et frottement solide. Le frottement fluide est le résultat de frottement avec l'air ou l'eau. Le frottement solide est lié au contact entre deux solides. Par ailleurs, le coefficient de frottement solide f est sans dimension alors que le coefficient de frottement fluide α est dimensionnée.

²Cette loi sera revue en mécanique du solide dans le détail. Il s'agit ici d'un cas particulier, celui où les objets glissent.

³Le Reynolds est un nombre sans dimension qui permet de déterminer si l'écoulement est laminaire ou turbulent.

2.4 Etude pratique d'exemples simples.

2.4.1 De la méthode...

1. Faire un schéma.
2. Le référentiel :
"Considérons le système ponctuel M de masse m dans le référentiel R supposé galiléen"
3. Bilan des forces sur schéma.
"Ce point est soumis aux forces suivantes :"
4. Bilan des inconnues cinématiques :
"Pour décrire ce mouvement, il faut obtenir"
5. Ecrire la deuxième loi de Newton (=principe fondamental de la dynamique)
6. Projeter dans le système d'axe adapté. (cf. chapitre 1)
7. Résoudre en fonction des C.I.

2.4.2 La chute libre.

Publicité des parachutistes qui rattrapent la voiture (Opel Zafira). Est ce possible ?

Etude sans frottement.

Etude de la chute libre. $\ddot{z} = -g$ et $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$. Indépendant de la masse !

Etude avec frottement fluide.

Existence d'une vitesse limite. $\ddot{z} = -g + \frac{h}{m}\dot{z}$.

Etude avec frottement $\propto v^2$.

Existence d'une vitesse limite. $\dot{v} = -g + \frac{\alpha}{m}v^2$.

2.4.3 Le ressort et la masse : Cas vertical.

Etude **autour de la position d'équilibre** pour trouver l'équation de l'oscillateur harmonique.
 $\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$ avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

2.4.4 Le pendule pesant sans frottement.

Etude **autour de la position d'équilibre**.

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0 \text{ avec } \omega_0^2 = \frac{g}{l}.$$

2.5 Exercices.

2.5.1 La chute libre.

Dans la publicité pour une voiture, des parachutistes poussent une voiture dans le vide, ils sautent alors à leur tour et rattrapent la voiture en chute libre.

On supposera que tous (voiture et parachutistes) partent sans vitesse initiale.

Partie I.

Etude sans frottement.

1. Etablir l'équation vérifiée par $\ddot{z}(t)$.
2. Calculer $\dot{z}(t)$ et $z(t)$.
3. Conclusion : les parachutistes peuvent-ils rattraper la voiture ?

Partie II

On suppose maintenant que tous sont soumis, en plus, à la résistance de l'air. $\vec{f} = -h\vec{v}$.

1. Etablir l'équation vérifiée par $\ddot{z}(t)$.
2. Poser $v_z = \dot{z}(t)$. Donner l'équation vérifiée par v_z . La résoudre.
3. Calculer $x(t)$ et $z(t)$.
4. Conclusion : les parachutistes peuvent-ils rattraper la voiture ?

2.6 Le ressort et la masse. Exercice de cours.

On considère une masse m attachée à l'extrémité d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 .

Partie I.

Etude horizontale sans frottement (ni solide, ni fluide).

Le ressort est, à $t=0$, allongée d'une longueur a et lâchée sans vitesse initiale.

1. Etablir l'équation vérifiée par $\ddot{x}(t)$.
2. Calculer $x(t)$.
3. Que dire de la nature du mouvement.

Partie II.

Etude verticale sans frottement.

1. Déterminer la longueur à l'équilibre l_{eq} du ressort.
Le ressort est, à $t=0$, à l'équilibre est percuté par une bille qui lui communique alors une vitesse \vec{v}_0 selon la verticale ascendante.
2. On étudie le mouvement autour de la position d'équilibre. Etablir l'équation vérifiée par $\ddot{z}(t)$.
3. Calculer $z(t)$.

Partie III.

Etude verticale avec une force de frottement fluide.

1. La position d'équilibre est elle changée ?
2. On étudie toujours le mouvement autour de la position d'équilibre. Etablir l'équation vérifiée par $\ddot{z}(t)$.
3. Calculer $z(t)$ en vous inspirant de votre expérience personnel de l'expérience.

2.6.1 La balle de tennis.

Un joueur de tennis tape à instant $t = 0$ dans une balle (de tennis) de masse m , situé à un mètre du sol, et lui communique une vitesse \vec{v}_0 horizontale.

Partie I.

Etude sans frottement.

1. En supposant la balle comme ponctuelle et confondue avec son centre de gravité, quel mouvement de l'objet n'est pas décrit.
2. Etablir l'équation vérifiée par $\ddot{x}(t)$ et $\ddot{z}(t)$.
3. Calculer $x(t)$ et $z(t)$.
4. Sachant que le joueur est situé au moment de sa frappe à une distance $d=20\text{m}$ de la ligne de fond adverse, calculer la vitesse maximum qu'il doit communiquer à la balle
5. Calculer le module de la vitesse et la direction de la vitesse lors de l'impact au sol.
6. On admet que la balle repart après rebond comme la lumière est réfléchi sur un miroir. Décrire la vitesse juste après le rebond. Cette description vous semble-t-elle correcte.
7. Sans calcul, décrire le mouvement de la balle après rebond. Est ce réaliste ?

Partie II

On suppose maintenant que la balle est soumise, en plus, à la résistance de l'air. $\vec{f} = -h\vec{v}$.

1. Etablir l'équation vérifiée par $\ddot{x}(t)$ et $\ddot{z}(t)$.
2. Calculer $x(t)$ et $z(t)$.
3. Calculer le module de la vitesse et la direction de la vitesse lors de l'impact au sol. Commenter.

Réponse : 6. $v_x = v_0 \cos \alpha \exp -\frac{ht}{m}$ $v_z = (v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{h}) \exp -\frac{ht}{m} - \frac{mg}{h}$ 7. $x(t) = \frac{m}{h} v_0 \cos \alpha (1 - \exp -\frac{ht}{m})$ $z(t) = \frac{m}{h} (v_0 \sin \alpha + \frac{mg}{h}) (1 - \exp -\frac{ht}{m}) - \frac{mgt}{h}$ 8. $t_s = \frac{m}{h} \ln(1 + \frac{hv_0 \sin \alpha}{mg})$

2.6.2 Jeu d'eau.

Dans un parc aquatique, un enfant de masse m , initialement au sommet du ballon quasiment immobile, glisse sur le ballon de rayon a .

1. Pourquoi peut on considérer ce mouvement comme sans frottement ?
2. Etudier le mouvement de l'enfant sur le ballon. Donner l'expression de $\dot{\theta}$ en fonction de θ .
3. Quel est l'angle pour lequel l'enfant perd le contact avec le ballon ?
4. Etudier le mouvement ultérieur.
5. Calculer la vitesse à laquelle l'enfant touche l'eau. Commenter.

Réponse : 2. $\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{a} (1 - \cos \theta)$ 3. $\theta_0 = \arccos 2/3$ 4. $\vec{v} = \sqrt{\frac{2ga}{3}} (\frac{2}{3}\vec{u}_x + \sqrt{\frac{5}{9}}\vec{u}_z)$ 5. $v_f = \sqrt{2ga}$

Chapitre 3

Théorème du moment cinétique.

Quittons un instant la mécanique du point et intéressons nous à un solide, par exemple le mouvement d'une hélice d'éolienne. Pour étudier le mouvement de cet objet en rotation autour d'un axe fixe, la quantité de mouvement n'est pas la grandeur appropriée. Le centre de gravité est immobile et pourtant le solide est en mouvement : il tourne.

Bien que nous ne nous intéresserons pas à des solides et que nous continuerons à étudier que les systèmes matériels, cet exemple nous révèle qu'il faut introduire pour décrire les mouvements de rotation, une nouvelle grandeur : le moment cinétique.

Toujours en introduction, intéressons nous à la manière d'appliquer une force sur une porte pour la mettre en rotation.

Schéma.

1. cas. Si la force appliquée est dirigée vers axe, la porte ne bouge pas.
2. cas. Si la force appliquée est dirigée parallèle à l'axe, la porte ne tourne pas (si elle ne se dégonde pas).
3. cas. Si la force appliquée est perpendiculaire à l'axe, proche de l'axe, la porte tourne mais peu.
4. cas. Si la force appliquée est perpendiculaire à l'axe, loin de l'axe (au niveau de la poignée), la porte tourne très facilement. Telle est la manière d'utiliser une porte.

Voilà les observations dont il va falloir rendre compte dans la suite.

3.1 Moment cinétique d'un point matériel dans le référentiel R .

3.1.1 Moment cinétique par rapport à un point O .

Définition :

Considérons le point M , de masse m et de quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$ dans le référentiel R . Le moment cinétique \vec{L}_A du point M par rapport au point A est le produit vectoriel du vecteur \vec{AM} et de la quantité de mouvement \vec{p} .

$\vec{L}_A = A\vec{M} \wedge \vec{p}$. L'unité est le $kg.m.s^{-1}$.

Remarque : Le moment cinétique dépend du référentiel choisi.

Remarque 2 : Structure de Torseur.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{L}_A \\ \vec{p} \end{array} \right|_A \quad \text{D'où } \vec{L}_B = \vec{L}_A + \vec{p} \wedge \vec{AB}$$

3.1.2 Moment cinétique par rapport à l'axe Δ .

Définition :

Considérons le point M, de masse m et de quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$ dans le référentiel R. Considérons l'axe Δ , passant par A_Δ , de vecteur unitaire \vec{u}_Δ .

Le moment cinétique de M par rapport à l'axe Δ , noté $L_\Delta(M)$, est défini par le produit scalaire du moment cinétique de M par rapport à A_Δ et du vecteur unitaire de la droite Δ : \vec{u}_Δ .

$$L_\Delta(M) = \vec{L}_{A_\Delta}(M) \cdot \vec{u}_\Delta.$$

Le moment se mesure en $kg.m.s^{-1}$.

Remarque :

Le moment par rapport à un point est un vecteur alors que le moment par rapport à un axe est un scalaire.

3.2 Etude dynamique de la rotation : le moment d'une force.

3.2.1 Moment d'une force par rapport à un point O.

Définition :

Considérons le point M, soumis à une force \vec{f} .

Le moment de la force \vec{f} , par rapport au point A, noté $\vec{M}_A(\vec{f})$, est défini par le produit vectoriel de $A\vec{M}$ et de \vec{f} .

$$\vec{M}_A(\vec{f}) = A\vec{M} \wedge \vec{f}.$$

Le moment se mesure en $N.m^{-1}$.

Rappel :

$$|\vec{M}_A(\vec{f})| = |A\vec{M}| |\vec{f}| \sin(A\vec{M}, \vec{f}).$$

$$\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y = \vec{u}_z, \quad \vec{u}_y \wedge \vec{u}_z = \vec{u}_x, \quad \vec{u}_z \wedge \vec{u}_x = \vec{u}_y.$$

Règle des trois doigts de la main droite.

Calcul en coordonnées cartésienne :

$$\vec{M}_A(\vec{f}) = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} yf_z - zf_y \\ -(xf_z - zf_x) \\ xf_y - yf_x \end{vmatrix}$$

Application : calcul de quelques formules. $\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y$ et $(2\vec{u}_x + 3\vec{u}_z) \wedge \vec{u}_y$.

3.2.2 Moment d'une force par rapport à un axe Δ .

Considérons le point M, soumis à une force \vec{f} .

Considérons l'axe Δ , passant par O_Δ , de vecteur unitaire \vec{u}_Δ .

Le moment de la force \vec{f} , par rapport à l'axe Δ , noté $M_\Delta(\vec{f})$, est défini par le produit scalaire du moment de la force \vec{f} par rapport à A_Δ et du vecteur unitaire de la droite Δ : \vec{u}_Δ .

$$M_\Delta(\vec{f}) = \vec{M}_{A_\Delta}(\vec{f}) \cdot \vec{u}_\Delta.$$

Le moment se mesure en $N.m^{-1}$.

Remarque :

Le moment par rapport à un point est un vecteur alors que le moment par rapport à un axe est un scalaire.

Application et interprétation des expériences faites en introduction :

1. cas : force vers axe. Observation : pas de mouvement.
 $\vec{M}_{A_\Delta}(\vec{f}) = \vec{A}$. Donc pas de moment par rapport à l'axe.
2. cas : force parallèle à l'axe. Observation : pas de mouvement.
 $\vec{M}_{A_\Delta}(\vec{f}) \neq \vec{A}$ d'après règle des trois doigts de la main droite mais vecteur orthogonal à l'axe.
 Donc $M_\Delta(\vec{f}) = 0$. Donc pas de moment par rapport à l'axe.
3. cas : force proche axe. Observation : peu de mouvement.
4. cas : force loin de l'axe. Observation : mvt facile alors que c'est la même porte.
 Ces deux derniers cas ont un moment non nul. Comment expliquer la différence de mouvement.

Bras de Levier.

En pratique, dans les calculs, il faut choisir pour point A_Δ le point H qui est le projeté orthogonal du point d'application de l'effort sur l'axe Δ . (Utiliser la porte pour noter H à la craie pour bien visualiser en 3D).

$$M_\Delta(\vec{f}) = \vec{M}_{A_\Delta}(\vec{f}) \cdot \vec{u}_\Delta = (H\vec{M} \wedge \vec{f}) \cdot \vec{u}_\Delta = +|H\vec{M}| |\vec{f}|.$$

Le signe est pertinent : signe + signifie que \vec{f} fait tourner la porte dans le sens définie par \vec{u}_Δ . (Règle de la main droite : schéma).

Définition :

Dans l'expression $M_\Delta(\vec{f}) = +|H\vec{M}| |\vec{f}|$, la distance $|H\vec{M}|$ est appelée bras de levier de la force par rapport à l'axe Δ .

Application :

Justification des cas 3 et 4 de l'expérience d'introduction.

Comment soulever une pierre de 1 tonnes avec un seul bras.

Démultiplier une action.

"Donnez-moi un point d'appui et je soulèverai le monde" Archimède de Syracuse.

3.3 Théorème du moment cinétique dans un référentiel galiléen.

3.3.1 Enoncé du théorème.

Théorème du moment cinétique par rapport à un point A immobile dans le référentiel galiléen :
 Considérons le point M, de masse m et de quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$, soumis à une force \vec{f} dans le référentiel galiléen R_G . Soit A un point immobile dans le référentiel galiléen R_G .

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A(\vec{f}).$$

Démonstration :

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \frac{d}{dt}(A\vec{M} \wedge m\vec{v}) = \vec{v} \wedge m\vec{v} + A\vec{M} \wedge m\frac{d\vec{v}}{dt} = 0 + A\vec{M} \wedge \vec{f}.$$

Théorème du moment cinétique par rapport à un axe Δ immobile dans le référentiel galiléen :
 Considérons le point M, de masse m et de quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$, soumis à une force \vec{f} dans le référentiel galiléen.

Considérons l'axe Δ , passant par A_Δ , de vecteur unitaire \vec{u}_Δ , immobile dans le référentiel R_G .

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = M_\Delta(\vec{f}).$$

Démonstration :

Il suffit de projeter le TMC en A_Δ sur \vec{u}_Δ .

Il n'est donc pas essentiel de connaître le théorème du moment cinétique par rapport à un axe Δ . Néanmoins, cette notion est vue pour deux raisons : 1- Il faut tjrs projeter le TMC sur axe Δ fixe. 2- La notion de bras de levier est importante pour la mécanique des solides et à savoir mettre en pratique.

3.3.2 Le pendule.

Retrouver l'équation de $\theta(t)$ du pendule à partir du théorème du moment cinétique.

Remarque : Les galaxies sont planes du fait de la conservation du moment cinétique.

3.4 Exercice.

Une bille, assimilée à un point matériel est déposée à $t = 0$ dans un bol sphérique en M_0 (repéré par un angle θ_0) comme indiqué figure 1. Cette bille se déplace sans frottement aucun.

1. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, trouver l'équation dont est solution $\theta(t)$.
2. Dans l'hypothèse des petits mouvements, simplifier et résoudre cette équation.
3. Quel est l'allure du portrait de phase correspondant au mouvement décrit dans la question précédente. (Préciser le sens de parcours de la trajectoire).
4. Retrouver l'équation établie au 2 par une étude énergétique.
5. En appliquant le théorème du moment cinétique en 0, retrouver une fois encore l'équation établie au 2.
6. Pourquoi est il intéressant de calculer le TMC en 0.

Réponse : 1. $\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin(\theta) = 0$ 2. $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$ 3. Ellipse

Chapitre 4

Approche énergétique

Dans le chapitre précédent, nous avons établies les principes fondamentaux de la mécanique newtonienne. Nous avons vu comment établir les équations différentielles du mouvement, et comment les résoudre, exactement comme en électrocinétique.

Nous allons dans ce chapitre étudier l'aspect énergétique du problème. Cette aspect découle directement du principe fondamental de la mécanique et n'apporte concrètement aucune information supplémentaire. Quel est alors l'intérêt de cette reformulation ? L'étude énergétique s'avère particulièrement agréable lors que le système est conservatif, qu'il ne dissipe pas son énergie.

4.1 Théorème de l'énergie cinétique.

4.1.1 Puissance et travail d'une force.

Puissance d'une force.

Définition : la puissance d'une force \vec{f} qui s'applique sur le point M se déplaçant à la vitesse $\vec{v}_R(M)$ dans le référentiel R est définie par :

$$P(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{v}_R(M)$$

L'unité de la puissance est le Watt. (homogène $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$).

La force est dite motrice si $P > 0$.

La force est dite résistante si $P < 0$.

Remarque : la puissance est additive. Si le point M est soumis à plusieurs forces, la puissance de la résultante des forces est la somme des puissances des différentes forces.

Travail d'une force.

Définition : le travail élémentaire entre l'instant t et l'instant $t + dt$ de la force \vec{f} qui s'applique sur le point M se déplaçant à la vitesse $\vec{v}_R(M)$ dans le référentiel R est définie par :

$$\delta W(\vec{f}) = P(\vec{f}).dt = \vec{f}.d\vec{OM}$$

L'unité du travail est le Joule. (homogène $\text{kg.m}^2.\text{s}^{-2}$).

Il est possible en regardant le signe du travail de déterminer si la force est motrice ou pas.

Remarque de notation :

Le travail élémentaire se note $\delta W(\vec{f})$ et non pas $dW(\vec{f})$ car le travail dépend du chemin suivi.

L'exemple de l'alpiniste qui passe d'une vallée à l'autre.

Dans la suite, nous noterons $O\vec{M} = \vec{r}$ et donc $dO\vec{M} = d\vec{r}$.

Définition : le travail entre l'instant t_1 et l'instant t_2 , correspondant respectivement à la position M_1 et M_2 , de la force \vec{f} qui s'applique sur le point M se déplaçant à la vitesse $\vec{v}_R(M)$ dans le référentiel R est définie par :

$$W_{1 \rightarrow 2}(\vec{f}) = \int_1^2 \delta W(\vec{f}) = \int_{t_1}^{t_2} P(\vec{f}).dt = \int_{M_1}^{M_2} \vec{f}.d\vec{r}$$

4.1.2 Le théorème de l'énergie cinétique.

Le théorème.

Théorème de l'énergie cinétique :

Dans le référentiel galiléen R, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel de masse m entre deux instants (ou deux positions) est égale à la somme des travaux des forces appliquées entre ces deux instants.

$$\frac{dE_C}{dt} = P(\vec{f})$$

$$dE_C = P(\vec{f})dt = \delta W(\vec{f})$$

$$\Delta E_C = E_C(t_2) - E_C(t_1) = W_{1 \rightarrow 2}(\vec{f})$$

Démonstration :

Considérons le mouvement du point M dans le référentiel du laboratoire considéré comme galiléen.

Ce point est soumis à la force \vec{f} .

Le principe fondamental de la dynamique nous donne : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f}$.

Pour faire apparaître la puissance, il faut multiplier (produit scalaire) cette équation par $\cdot \vec{v}$.

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2) = P(\vec{f}).$$

définition : l'énergie cinétique du point matériel m se déplaçant à la vitesse $\vec{v}_R(M)$ dans le référentiel R est définie par :

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2$$

Intérêt de l'intégrale première du mouvement.

Ce théorème, vu sa formulation et sa démonstration est appelée intégrale première du mouvement. Ceci nous rappelle aussi que cette équation n'apporte aucune information supplémentaire par rapport au principe fondamentale de la dynamique.

Quel est l'intérêt de cette reformulation ?

- Il s'agit d'une équation scalaire, contrairement au PFD qui est une équation vectorielle. Intérêt : pas besoin de la projeter. Inconvénient : une seule équation. Aspect énergétique pour les systèmes à un degrés de liberté, i.e. à une seule inconnu cinématique.
- Suppose de savoir calculer $W_{1 \rightarrow 2}(\vec{f})$.
Ce calcul n'est facile que pour certaines forces, les forces conservatives.

4.2 Théorème de l'énergie mécanique.

4.2.1 Energie potentielle et force conservative.

Définition : Une force appliquée au point M , dont le travail est non nul est dite conservative si son travail entre deux positions quelconques M_1 et M_2 ne dépends que de celles-ci et pas du chemin suivi par la particule entre ces deux points.

Le poids est conservatif :

$$W_{1 \rightarrow 2}(m\vec{g}) = -mg(z_2 - z_1) \text{ avec } z \text{ verticale ascendante.}$$

Démonstration :

$$W_{1 \rightarrow 2}(m\vec{g}) = \int m\vec{g} \cdot \vec{v} dt = - \int mg \dot{z} dt = -mg \int dz$$

La tension d'un ressort est conservative :

$$W_{1 \rightarrow 2}(\vec{T}) = -\left(\frac{1}{2}k(x_2 - l_0)^2 - \frac{1}{2}k(x_1 - l_0)^2\right).$$

L'interaction gravitationnelle est conservative :

$$W_{1 \rightarrow 2}(gravit) = -Gm_A m_B \left(-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1}\right)$$

L'interaction électrostatique est conservative :

$$W_{1 \rightarrow 2}(electrostat) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_A q_B}{r_2} - \frac{q_A q_B}{r_1}\right)$$

Définition : l'énergie potentielle, E_P , est une fonction définie en tout point de l'espace, telle que sa variation entre deux points quelconques M_1 et M_2 est égale à l'opposée du

travail de la force conservative considérée entre ces points :

$$\Delta E_P (1 \rightarrow 2) = E_P(M_2) - E_P(M_1) = -W_{1 \rightarrow 2}(\vec{f})$$

Remarque 1 : la variation infinitésimale de l'énergie potentielle se note dE_P car sa variation, comme nous venons de le voir, n'est fonction que du point de départ et du point d'arrivée, non pas du chemin suivi.

Ceci rend le calcul facile : notion importante.

Remarque 2 : L'énergie potentielle est définie par ses variations. Donc l'énergie potentielle est toujours définie à une constante près.

Un choix judicieux de cette référence de l'énergie potentielle simplifie les calculs.

Pour une force conservative, pour un problème unidimensionnel, $\vec{f} = f(x)\vec{u}_x$:
 $\delta W = -dE_P = -f(x).dx$ d'où $f(x) = -\frac{dE_P}{dx}$.

Pour un problème tridimensionnel,

$$\vec{f} = -\vec{\text{grad}} E_p$$

Diverses expressions de l'énergie potentielle (à connaître) :

$E_P(\text{pesanteur}) = mgz + \text{cste}$ avec z selon la verticale ascendante. (commentaire sur signe)

$E_P(\text{ressort}) = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 + \text{cste}$. Potentiel harmonique.

$E_P(\text{gravitationnelle}) = -Gm_A m_B \frac{1}{r} + \text{cste}$.

$E_P(\text{electrostat}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{r} + \text{cste}$

Exemple de force non conservative : les frottements de toute nature, (fluide ou solide).

4.2.2 Théorème de l'énergie mécanique.

$$dE_C = \delta W(\vec{f}_{\text{conservative}}) + \delta W(\vec{f}_{\text{non conservative}})$$

or $\delta W(\vec{f}_{\text{conservative}}) = -dE_P \text{ conservative}$

$$dE_C + dE_P \text{ conservative} = \delta W(\vec{f}_{\text{non conservative}})$$

Définition : l'énergie mécanique d'un point M dans le référentiel R est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle du point.

$$E_M = E_C + E_P$$

Remarque : E_M dépend du référentiel R et est définie à une constante près.

Le théorème de l'énergie mécanique :

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie mécanique d'un point matériel de masse m entre deux instants est égale à la somme des travaux des forces non conservatives appliquées entre ces deux

instants.

$$\begin{aligned}\frac{dE_M}{dt} &= P(\vec{f}_{non\ conservative}) \\ dE_M &= P(\vec{f}_{non\ conservative})dt = \delta W(\vec{f}_{non\ conservative}) \\ \Delta E_M &= E_M(t_2) - E_M(t_1) = W_{1 \rightarrow 2}(\vec{f}_{non\ conservative})\end{aligned}$$

4.2.3 Avantage et inconvénient de l'énergie mécanique.

Le théorème de l'énergie mécanique, appelé lui aussi intégrale première du mouvement, est une réécriture du théorème de l'énergie cinétique, qui est lui même une équation issue de l'intégration du principe fondamental de la mécanique. Il n'apporte donc aucune information nouvelle.

Il est moins complet que le PFD qui est une équation vectorielle (3 équations), puisqu'il s'agit d'une équation scalaire. Toutes les forces perpendiculaires au mouvement disparaissent de cette équation. ($\vec{f} \cdot \vec{v}$) ce qui est une force mais aussi une faiblesse.

Ce théorème n'a pas à être projeté.

Ce théorème permet de faire un bilan entre deux points (ou deux instants) sans se soucier du mouvement entre ces deux points, si toutes les forces qui travaillent sont conservatives.

En résumé, l'approche énergétique est agréable pour les systèmes :

- à un seul degré de liberté. (donc qui ne nécessite qu'une seule équation)
- dont toutes les forces qui travaillent sont conservatives.

Dans ce cas, l'énergie mécanique est une constante du mouvement. $E_M = cste(C.I.) = E_M(t = 0)$.

Chapitre 5

Les systèmes oscillants.

5.1 Le régime libre

5.1.1 Mise en équation du problème du ressort+masse.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \text{ ou } \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q_0} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

5.1.2 Etude sans frottement.

facteur de qualité infini, $Q_0 = \infty$.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

$x(t) = A \cos(\omega_0.t) + B \sin(\omega_0.t)$ Deux conditions initiales pour déterminer A et B. $x(t=0) = a$ et $v(t=0) = 0$

D'où $A = a$ et $B = 0$.

Interprétation énergétique :

Puits de potentielle.

Lien entre les oscillations sinusoidales et le potentielle harmonique.

Cf. figure 5.1

5.1.3 Etude avec frottement fluide $\vec{f} = -h\vec{v}$.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q_0} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

– Premier Cas. $\Delta > 0$.

Le polynôme caractéristique admet deux racines réelles. $x = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$.

$x(t) = A \exp(x_1.t) + B \exp(x_2.t) = \exp(\lambda.t)(A \exp(\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}.t) + B \exp(-\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}.t)).$

Deux conditions initiales pour déterminer A et B. $x(t=0) = a$ et $v(t=0) = 0$

– Deuxième cas. $\Delta < 0$.

Le polynôme caractéristique admet deux racines complexes conjuguées. $x = -\lambda \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$.

$x(t) = \exp(\lambda.t)(A' \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}.t) + B' \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}.t)).$

Deux conditions initiales pour déterminer (A',B'). $x(t=0) = a$ et $v(t=0) = 0$

– Troisième cas. $\Delta = 0$. soit $Q_0 = \frac{1}{2}$

Le polynôme caractéristique admet une racine double réelle.

$x(t) = \exp(\lambda.t)(At + B).$

Deux conditions initiales pour déterminer (A',B'). $x(t=0) = a$ et $v(t=0) = 0$

cf. figure 5.2 et 5.3.

La masse et le ressort horizontaux sans frottement

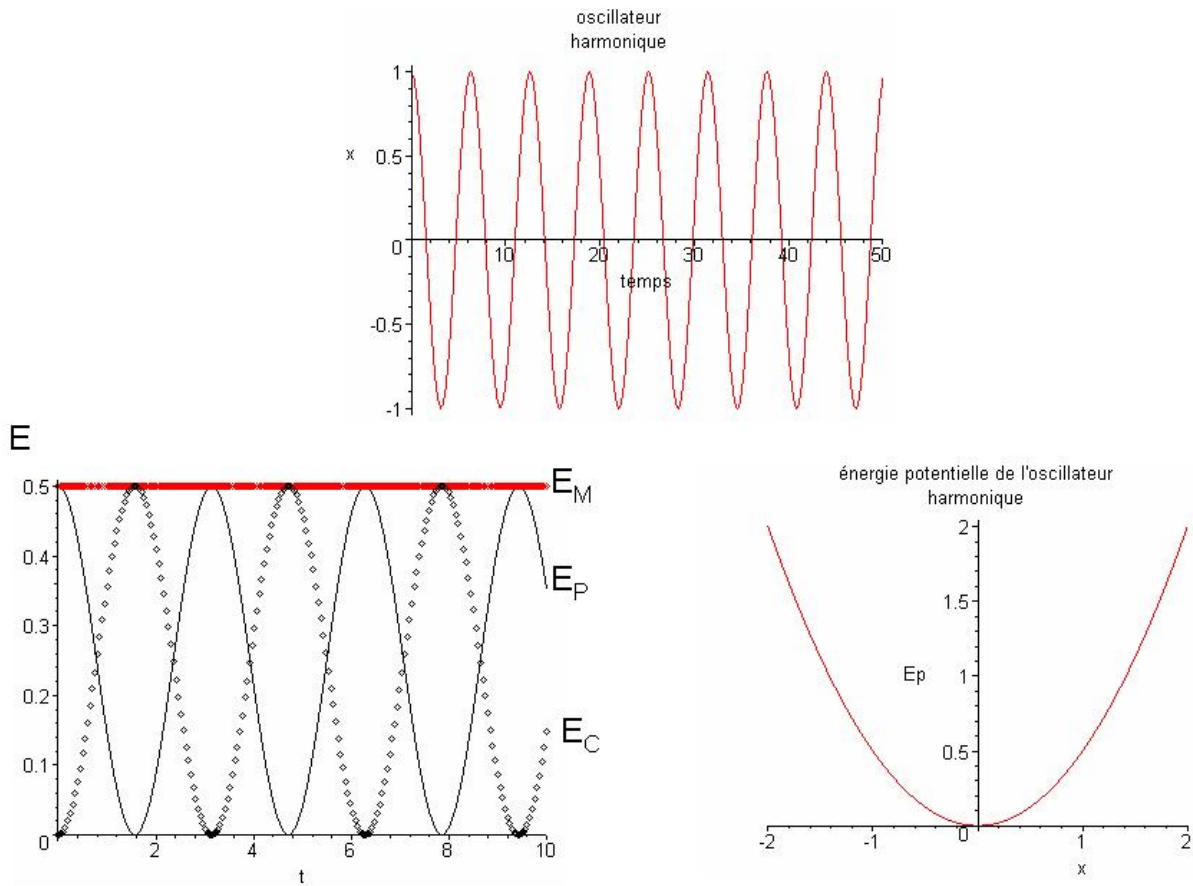


FIG. 5.1 – Oscillations sinusoidales

5.1.4 Oscillateur non linéaire : approche énergétique, portrait de phase.

Interprétation graphique de la conservation de l'énergie mécanique.

Considérons le système ponctuel M de masse m dans le référentiel R supposé galiléen
 Ce point est soumis aux forces suivantes : \vec{P} , \vec{F} la tension du fil.

La masse et le ressort horizontaux avec frottement fluide

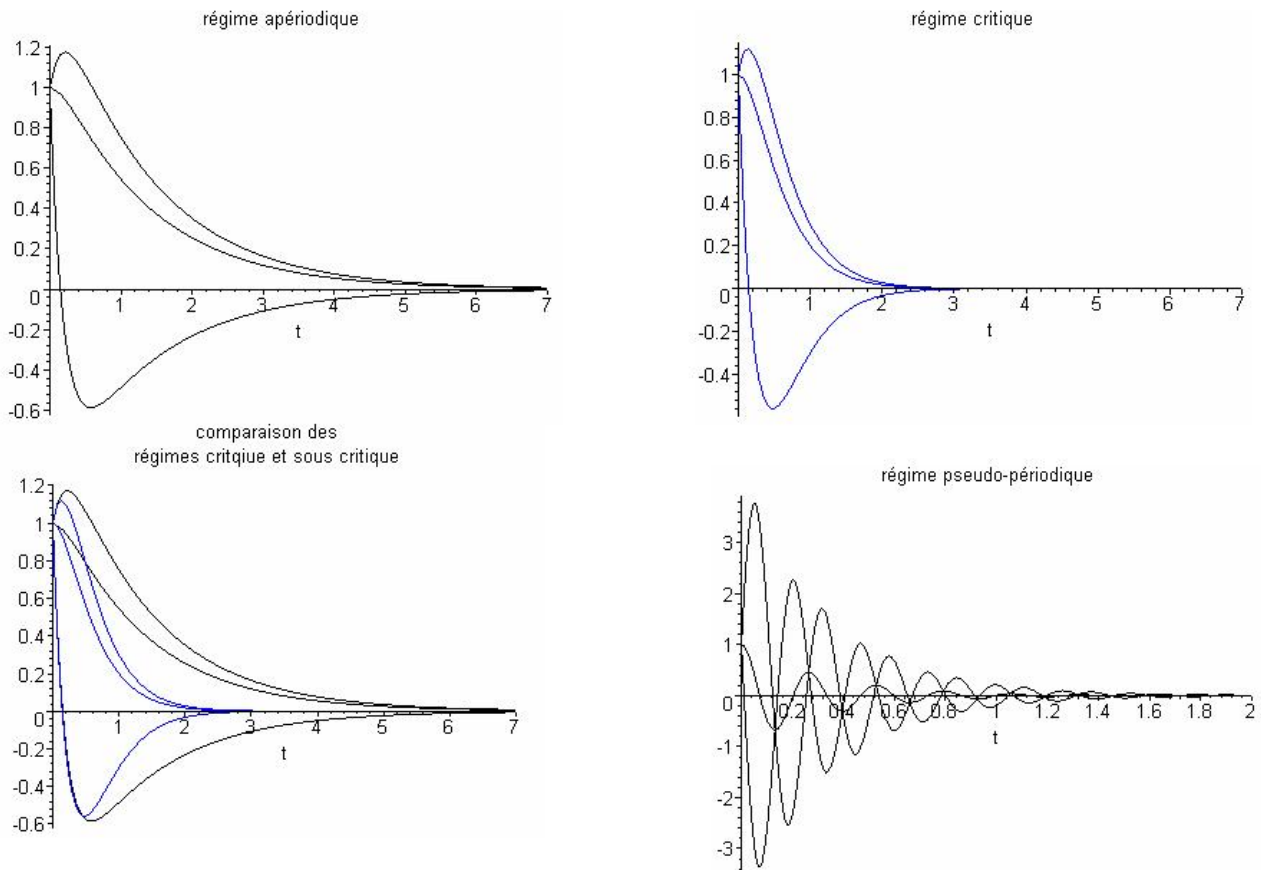


FIG. 5.2 – divers régimes libres

Pour décrire ce mouvement, il faut obtenir $\theta(t)$.

On a un système à un degré de liberté.

De plus, la tension du fil ne travaille pas, (\vec{F} perpendiculaire à \vec{v}) et le poids dérive d'une E_P donc bilan énergétique.

Référence de l' E_P dans position d'équilibre, en bas $cste = 0$.

$$\frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2 + mgR(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgR(1 - \cos \theta_0) = mgR(1 - \cos \theta_0)$$

Dérive pour avoir équation du mouvement.

$$mR^2\ddot{\theta} + mgR \sin(\theta) = 0$$

Même équation que PFD projeté sur \vec{u}_θ .

Il n'existe pas de solution analytique de cette équation mais il est possible d'obtenir un certain nombre d'informations de l'analyse énergétique.

La masse et le ressort horizontaux avec frottement fluide

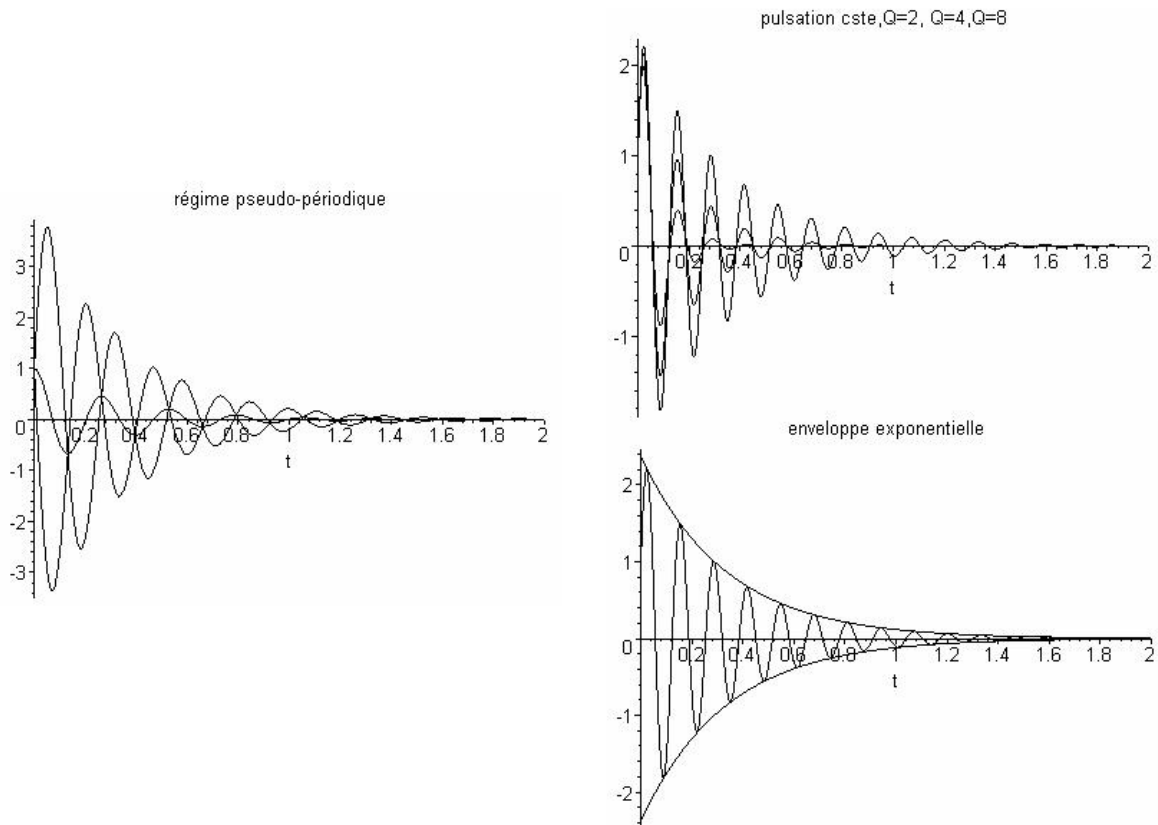


FIG. 5.3 – Comparaison des régimes libres

Linéarisation de l'équation et résolution.

On s'intéresse aux petits angles, c'est à dire aux oscillations autour de la position d'équilibre. $\sin \theta \simeq \theta$.

Pté importante : isochronisme des oscillations. (imp pour mesure du temps).

Effet des non linéarités : approche perturbative du problème.

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) &= 0 \\ \ddot{\theta} + \omega_0^2 \left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right) &= 0\end{aligned}$$

En cherchant une solution de la forme $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t)$, on trouve : $-\omega^2 \theta_0 \sin(\omega t) + \omega_0^2 \theta_0 \sin(\omega t) -$

$$\omega_0^2 \frac{1}{6} \theta_0^3 \sin^3(\omega t).$$

$$\text{Or } \sin^3(\omega t) = \frac{3}{4} \sin(\omega t) - \frac{1}{4} \sin(3\omega t)$$

L'apparition d'un terme à 3ω montre l'enrichissement du spectre dû aux non linéarités.

Par ailleurs, on trouve $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \theta_0^2/8}$ soit $T \simeq T_0(1 + \theta_0^2/16)$

Analyse du portrait de phase.

Le portrait de phase consiste à tracer \dot{x} en fonction de x . (Courbe paramétrée dans plan de phase). cf figure 5.4.

Il existe un lien très fort entre le portrait de phase et le potentiel.

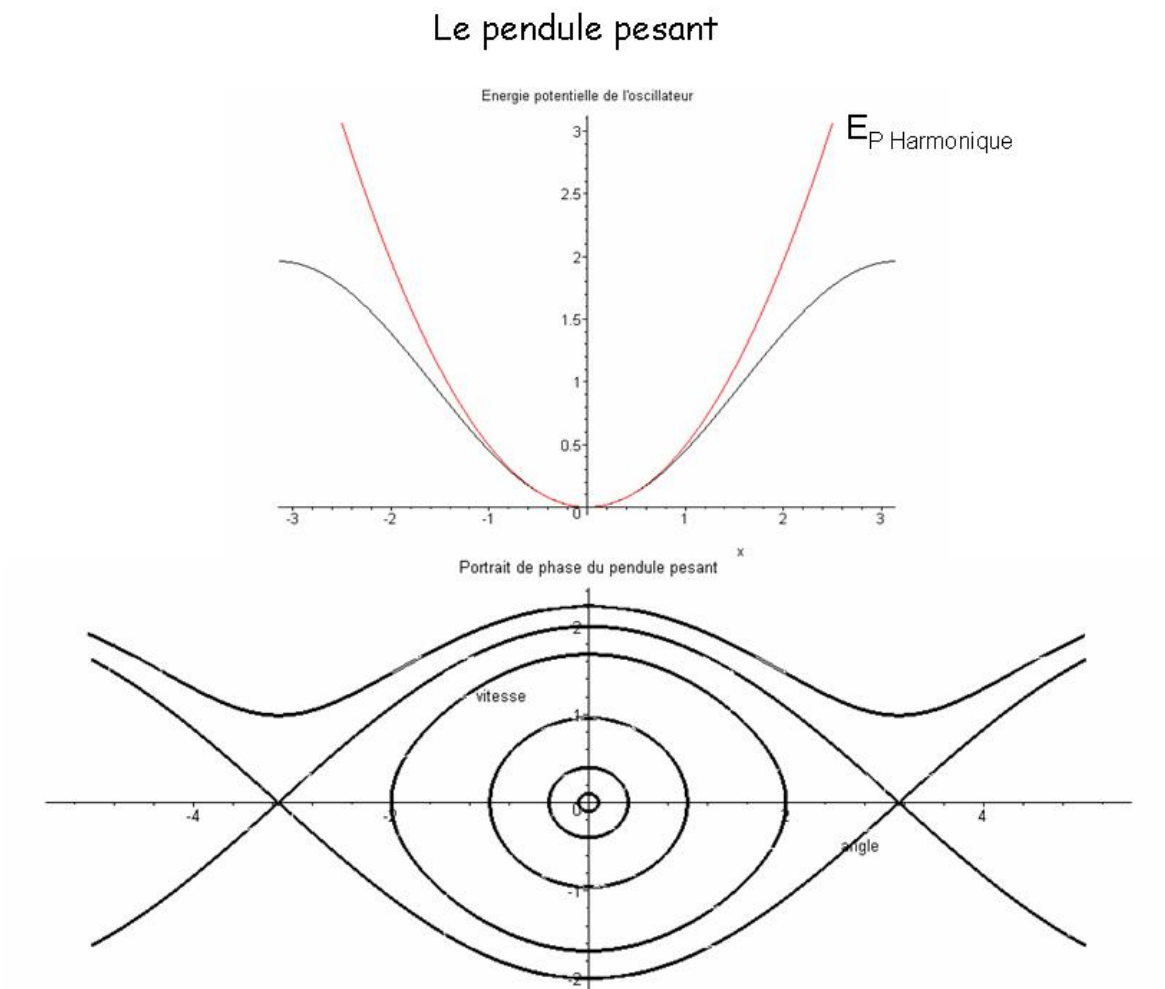


FIG. 5.4 – interprétation énergétique de l'énergie.

Analyse du portrait de phase.

1. Domaine des petites oscillations.

$$x = a \cos(\omega_0 t) \text{ et } \dot{x} = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t).$$

$$\text{Dans le cas de l'oscillateur considéré, } \frac{x^2}{a^2} + \frac{\dot{x}^2}{a^2\omega_0^2} = 1.$$

Trajectoire elliptique.

Trajectoires fermées : mvt périodique (mais pas obligatoirement sinusoïdal).

Trajectoires ellipses : mouvement périodique sinusoïdale, car le potentiel est quasi-harmonique.

La trajectoire est symétrique par rapport à l'axe Oy : le potentiel est pair ou symétrique. (Changer x en $-x$ ne change pas le problème.)

La trajectoire est symétrique par rapport à l'axe Ox : Il y a une invariance par changement de t en $-t$ (\dot{x} devient $-\dot{x}$), l'évolution est réversible.

Mouvement autour d'une position d'équilibre stable. Repère graphiquement sur portrait de phase.

2. Trajectoire non elliptique.

Trajectoires fermées : mvt périodique.

La trajectoire est symétrique par rapport à l'axe Oy : le potentiel est pair

La trajectoire est symétrique par rapport à l'axe Ox, l'évolution est réversible.

3. Trajectoire critique entre mvt oscillation et révolution. Cas limite.

Repère position d'équilibre instable. Bifurcation.

4. La vitesse ne s'annule jamais, elle reste de même signe : mvt de révolution.

5.2 Analogie avec les systèmes oscillants en électrocinétique.

Analogie entre masse et ressort horizontaux et R,L,C série.

grandeur d'évolution	x	q
	$v = \frac{dx}{dt}$	$i = \frac{dq}{dt}$
grandeur d'inertie	m	L
grandeur de rappel	k	$1/C$
grandeur d'atténuation	h	R
pulsation propre ω_0^2	$\frac{k}{m}$	$\frac{1}{LC}$
Puissance	$P = \vec{f} \cdot \vec{v}$	$P = u \cdot i$
Energie	$E_p = \frac{1}{2}kx^2$	$E_C = \frac{1}{2C}q^2$
	$E_c = \frac{1}{2}mv^2$	$E_L = \frac{1}{2}Li^2$
Bilan énergétique	$\frac{dE_m}{dt} = -hv^2$	$\frac{dE_{LC}}{dt} = -Ri^2$
Facteur de qualité Q_0	$\frac{m\omega_0}{h}$	$\frac{L\omega_0}{R}$

5.2.1 Etude énergétique d'un oscillateur.

Recherche des positions d'équilibres d'un oscillateur pour un problème unidimensionnel. x_{eq} tel que $\sum f = 0|_{x_{eq}}$ i.e. $\frac{dE_P}{dx}|_{x_{eq}} = 0$.

Etude de la stabilité. (petit graph)

- $\frac{d^2E_P}{dx^2}|_{x_{eq}} > 0$ équilibre stable.
- $\frac{d^2E_P}{dx^2}|_{x_{eq}} < 0$ équilibre instable.
- $\frac{d^2E_P}{dx^2}|_{x_{eq}} = 0$ équilibre indifférent.

Généralité de l'oscillateur harmonique.

$$E_P(x) = E_P(x_{eq}) + (x - x_{eq}) \frac{dE_P}{dx} \Big|_{x_{eq}} + \frac{1}{2} (x - x_{eq})^2 \frac{d^2E_P}{dx^2} \Big|_{x_{eq}} + \dots (\text{termes négligés})$$

$$E_P(x) = E_P(x_{eq}) + 0 + \frac{1}{2} k (x - x_{eq})^2 + \dots \text{ avec } k = \frac{d^2E_P}{dx^2} \Big|_{x_{eq}} > 0 \text{ pour les eq stables.}$$

Exemple du pendule pesant.

Remarque : pour un pb à deux dimensions, l'équilibre doit être stable dans les deux directions.

5.3 Etude du régime sinusoïdal forcé.

5.3.1 Importance du régime sinusoïdal forcé, mise en équation.

une force sinusoïdale est utilisée pour son caractère générateur : toute excitation périodique $F(t)$ peut être décomposée en une somme d'excitations sinusoïdales. Et comme les équations sont linéaires, la réponse au signal $F(t)$ est en fait la somme des réponses aux excitations sinusoïdales qui le composent.

Etude d'un système masse et ressort horizontaux, soumis à une force de frottement fluide et une force d'excitation sinusoïdale $\vec{F} = a_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$.

1. Faire un schéma.
2. Considérons le système ponctuel M de masse m dans le référentiel R lié au laboratoire supposé galiléen
3. Bilan des inconnues cinématiques. Pour décrire ce mouvement, il faut obtenir $x(t)$
4. Bilan des forces. Ce point est soumis aux forces suivantes :
son poids \vec{P} .
la réaction du support \vec{N} , perpendiculaire au support en l'absence de frottement solide
la tension du ressort $\vec{T} = -k(l - l_0) \vec{u}_x$ (si $l > l_0$, la tension du ressort est bien suivant $-\vec{u}_x$)
une force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$.
5. Dans le référentiel galiléen, la deuxième loi de Newton (ou principe fondamental de la dynamique) donne :
 $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{f}$
6. Projetons dans le système d'axe adapté
sur \vec{u}_x : $m\ddot{x} = 0 + 0 - k(l - l_0) - \alpha\dot{x}$.
sur \vec{u}_z : $0 = -mg + N + 0 + 0$.

L'équation du mouvement est donc : $m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - kx + F(t)$. Pour l'étudier comme nous l'avons fait en électrocinétique, il faut la mettre sous forme caractéristique.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F(t)/m$$

5.3.2 Résolution de l'équation différentielle.

Solution générale.

La solution de l'équation différentielle avec second membre s'effectue en deux étapes.

1. Résolution de l'équation homogène (sans second membre). Cette solution, notée $x_1(t)$, se nomme le régime transitoire.
2. Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre. Cette solution, notée $x_2(t)$, se nomme le régime permanent.

La solution générale est la somme des deux solutions ci dessus. $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$.

Nous avons vu que le régime transitoire s'atténuait, ceci à cause des pertes énergétiques dues aux frottements fluides. Donc après un temps plus ou moins long, il ne subsiste que le régime permanent. Au delà d'un certain temps, $x_1(t) \simeq 0$ et donc $x(t) \simeq x_2(t)$.

Le régime sinusoïdal forcé.

Lorsque l'excitation $F(t)$ est sinusoïdale, comme l'équation différentielle est linéaire, le système a un mouvement **de même fréquence mais qui peut être déphasé du signal excitateur**. La solution particulière qui nous intéresse est donc de la forme $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$.

Il est possible (mais pas souhaitable) de procéder par identification, donc réinjecter cette forme particulière dans l'équation pour trouver x_0 et φ mais **la bonne générale pour les trouver consiste à utiliser la notation complexe**.

A $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$, on fait correspondre $\underline{x(t)} = x_0 \exp(j(\omega t + \varphi))$.
Ainsi $\text{Re}(\underline{x(t)}) = x(t)$.

L'intérêt de la notation complexe est de remplacer l'équation différentielle par une équation algébrique plus simple :

Méthode 1.

$\frac{dx}{dt}$ correspond à $j\omega \underline{x}$.

$\frac{d^2x}{dt^2}$ correspond à $j^2\omega^2 \underline{x} = -\omega^2 \underline{x}$

$\int x dt$ correspond à $\frac{1}{j\omega} \underline{x} = \frac{-j}{\omega} \underline{x}$

Application : Passage de l'équation différentielle en complexe.

$$\underline{x}(-\omega^2 + j\frac{\omega_0}{Q}\omega + \omega_0^2) = F_0/m \exp(j\omega t).$$

$$x_0 \exp(j\varphi) = \frac{F_0/m}{-\omega^2 + j\frac{\omega_0}{Q}\omega + \omega_0^2}.$$

$$\text{On pose } u = \frac{\omega}{\omega_0}. \quad x_0 \exp(j\varphi) = \frac{F_0/(\omega_0^2 m)}{(1-u^2) + j\frac{u}{Q}}.$$

Recherche des caractéristiques de la réponse : amplitude et déphasage.

L'égalité des modules et arguments dans les deux membres de l'égalité conduit à :

$$x_0 = \frac{F_0/(\omega_0^2 m)}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}} \text{ (homogène) et } \tan(\varphi) = -\frac{u}{Q(1-u^2)}.$$

En mettant l'équation différentielle sous forme canonique, les équations trouvées sont parfaitement analogue à celle de l'électrocinétique en régime sinusoïdal forcé.

5.3.3 Etude de l'élongation.

L'étude en élongation est analogue à l'étude de la tension aux bornes du condensateur C dans le R,L,C série.

Il existe donc un phénomène de résonance sous condition : la résonance n'existe que si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ et elle a lieu pour $u_r = \frac{\omega_r}{\omega_0} < 1$.

Recherche de la pulsation de résonance en élongation.

La résonance a lieu quand x_0 passe par un maximum, donc quand $\sqrt{(1-u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}$ passe par un minimum, soit aussi $h(u) = (1-u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}$ minimum.

Recherche u_r tel que $h(u)$ minimum : $\frac{dh(u)}{du}\bigg|_{u=u_r} = 0$

$$u_r = \frac{\omega_r}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \text{ pour } Q > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

cf. figure 5.5

5.3.4 Etude de la vitesse.

$$v = \frac{dx}{dt} \text{ soit } \underline{v} = j\omega \underline{x}$$

$$v_0 \exp(j\varphi) = F_0/(\omega_0 m) \frac{j\omega}{(1-u^2) + j\frac{\omega}{Q}} = F_0/(Q\omega_0 m) \frac{1}{1 + jQ(u - \frac{1}{u})}.$$

L'égalité des modules et arguments conduit à :

$$v_0 = \frac{F_0/(Q\omega_0 m)}{\sqrt{Q^2(u-1/u)^2 + 1}} \text{ (homogène) et } \tan(\varphi) = -Q(u - 1/u).$$

L'étude en élongation est analogue à l'étude de la tension aux bornes de la résistance dans le R,L,C série.

Il existe toujours un phénomène de résonance et elle a lieu pour $u_r = \frac{\omega_r}{\omega_0} = 1$.

Rappel : bande passante $\Delta u = u_{c2} - u_{c1} = \frac{1}{Q}$ donc la résonance est d'autant plus piquée que le facteur de qualité est grand.

cf. figure 5.6

Remarque : $v = \frac{dx}{dt} = x_0 \omega \sin(\omega t + \varphi) = x_0 \omega \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$ (Cohérent puisque $j\omega = \omega \exp + j\frac{\pi}{2}$).

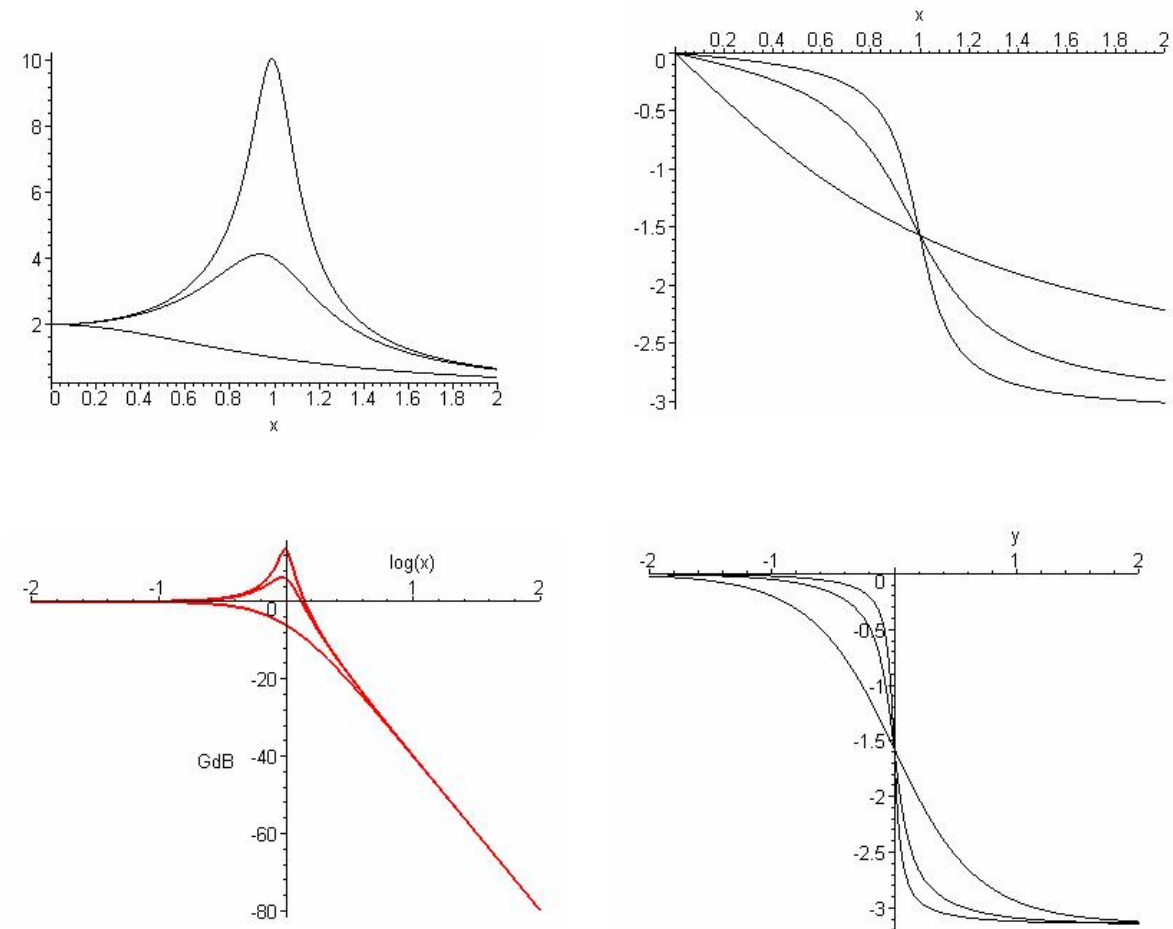


FIG. 5.5 – Résonance en élongation ou aux bornes de C dans R,L,C série (avec diagramme de Bode)

5.3.5 Etude énergétique.

Appliquons le théorème de l'énergie mécanique.

$$\frac{dE_m}{dt} = P_{\text{forces non conservatives}} = P_{\text{frottement fluide}} + P_{\text{excitation}}.$$

Intéressons nous à la valeur moyenne de bilan énergétique sur une période.

Rappel $\langle f \rangle_T = \frac{1}{T} \int f(t) dt$.

$$\langle \frac{dE_m}{dt} \rangle_T = \langle P_{\text{frottement fluide}} \rangle_T + \langle P_{\text{excitation}} \rangle_T.$$

Or, $\langle \frac{dE_m}{dt} \rangle_T = E_m(T) - E_m(0) = 0$ car $E_m(t)$ est T-périodique.

$$\langle P_{\text{frottement fluide}} \rangle_T + \langle P_{\text{excitation}} \rangle_T = 0.$$

En régime permanent, toute l'énergie fournie par l'excitation est dissipée par la force de frottement fluide. (Analogie avec le système R,L,C où toute l'énergie du générateur est dissipée par effet joule dans la résistance.)

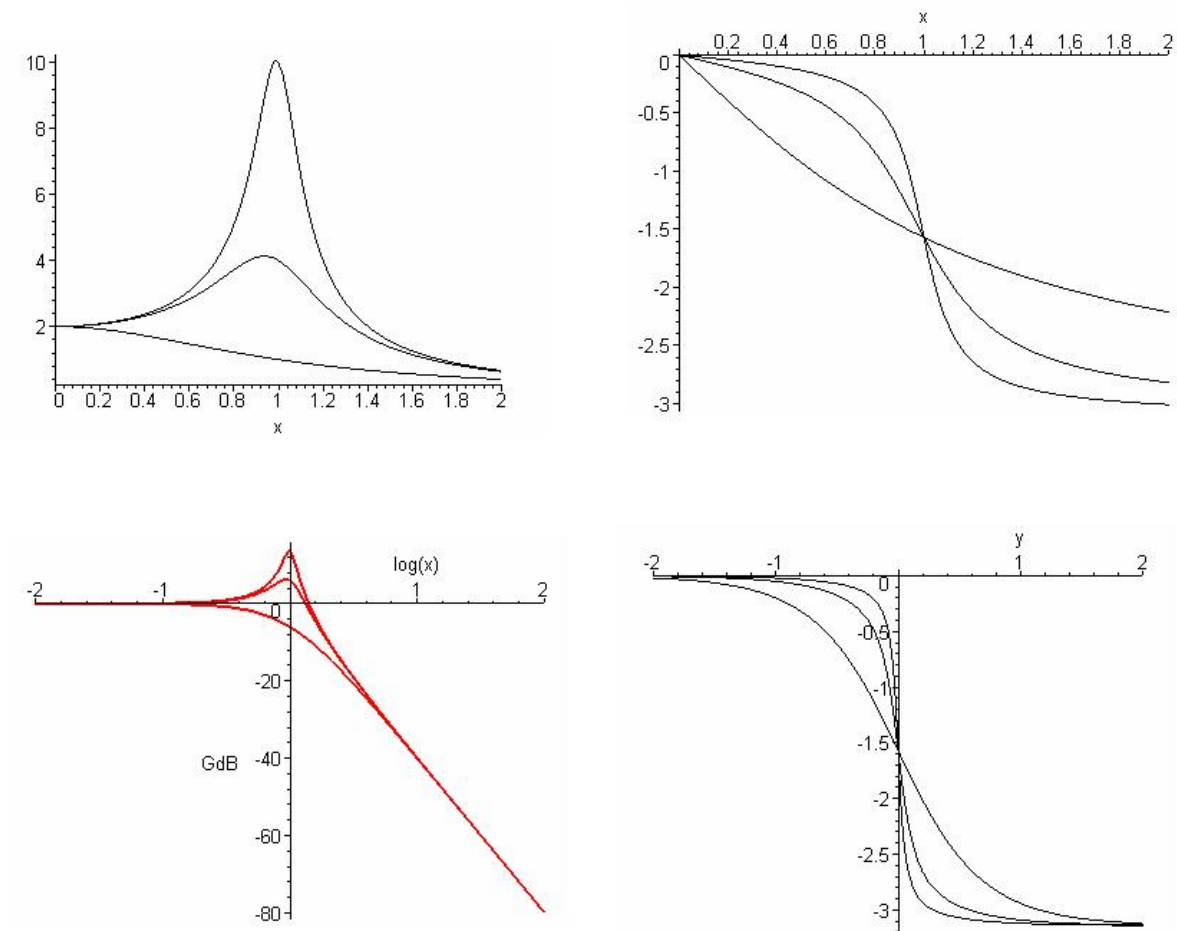


FIG. 5.6 – Résonance en vitesse ou aux bornes de R dans R,L,C série (avec diagramme de Bode)

Donc, la résonance en puissance est la résonance en vitesse puisque $\langle P_{\text{frottement fluide}} \rangle_T = -h \langle v^2 \rangle_T$.

Conclusion :

La résonance en élongation est l'analogie de la résonance en charge.

La résonance en vitesse est l'analogie de la résonance en intensité.

L'intérêt de cette analogie est qu'il est difficile d'étudier précisément les systèmes mécaniques que les systèmes électriques et qu'il est même impossible de réaliser certains montages en mécanique (en électricité on peut véritablement étudier le système sans perte alors qu'il est impossible de s'affranchir complètement des frottements en tout genre.)

5.4 Exercice.

5.4.1 Vitesse d'un oscillateur soumis à une excitation sinusoïdale.

Un ressort (k, l_0) est fixé au plafond. A l'extrémité basse de ce ressort, une masse ponctuelle m est alors accrochée. Cette masse est par la suite aussi soumise à une force de frottement fluide et une force d'excitation sinusoïdale $\vec{F} = F_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$.

1. Exprimer l'amplitude v_0 de la vitesse en fonction des divers grandeurs du problème. (Vous introduirez les paramètres adimensionnés appropriés.)
2. Déterminer le déphasage φ entre $v(t)$ et l'excitation harmonique.
3. Que se passe-t-il pour $\omega = \omega_0$?
4. Dans le cas ci dessus, calculer la perte énergétique sur une période.
5. Toujours dans ce même cas, calculer la valeur de l'énergie cinétique moyenne sur une période.
6. Quelle seraient les équivalent électriques dans un circuit R,L,C série des grandeurs calculées dans ce problème.

Réponse : 1. $v_0 = \frac{F_0/(Q\omega_0 m)}{\sqrt{Q^2(u-1/u)^2+1}}$ (homogène) 2. $\tan(\varphi) = -Q(u-1/u)$ 3. résonance. 4. Perte=
 $\frac{\pi F_0^2}{h\omega_0}$ 5. $\langle E_C \rangle = \frac{mF_0^2}{4h^2}$

5.4.2 Amplitude d'un oscillateur soumis à une excitation sinusoïdale.

Une masse ponctuelle m , accrochée à ressort (k, l_0) est posé sur une table. Elle se déplace sans frottement d'aucune sorte. Cette masse est soumise à une force d'excitation sinusoïdale $\vec{F} = F_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$.

1. Exprimer l'amplitude x_0 des oscillations en fonction des divers grandeurs du problème. (Vous introduirez les paramètres adimensionnés appropriés.)
2. Que se passe-t-il pour $\omega = \omega_0$? Commenter par rapport à votre connaissance du phénomène, et sur la réalité de la situation rencontrée (les problèmes que soulèvent une pareille situation).

Réponse : 1. $v_0 = \frac{F_0/(Q\omega_0 m)}{\sqrt{Q^2(u-1/u)^2+1}}$ (homogène) 2. $\tan(\varphi) = -Q(u-1/u)$ 3. résonance. 4. Perte=
 $\frac{\pi F_0^2}{h\omega_0}$ 5. $\langle E_C \rangle = \frac{mF_0^2}{4h^2}$

Chapitre 6

Etude des mouvements à force centrale.

L'objectif de ce chapitre est d'étudier le mouvement des planètes autour du soleil ou le mouvement des satellites (naturel, la lune ou artificiel) autour de la terre, mais aussi (dans une première approximation) le mouvement de l'électron autour du noyau.

Pour cette étude, plutôt que de se lancer tête baissée dans les calculs, nous allons exploiter les propriétés remarquables (les symétries) de la force d'interaction pour trouver des lois de conservation (démarche physique importante).

6.1 Etude du mouvement d'un point dans un champ de force centrale.

6.1.1 Position du problème.

Considérons le point M , de masse m , en mouvement dans un référentiel galiléen.

Si on étudie le mouvement de la terre par rapport au soleil, le référentiel supposé galiléen est le soleil.

Si on étudie le mouvement des satellites de la terre, le référentiel supposé galiléen est lié à la terre (mais sans sa rotation).

Si on étudie le mouvement de l'électron par rapport au noyau, le référentiel supposé galiléen est lié au noyau.

Pour décrire le mouvement de ce point M, il faut a priori ses trois coordonnées d'espace : $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ en coordonnées cartésiennes et $r(t)$, $\theta(t)$, $z(t)$ en coordonnées cylindriques. (Privilégie les coordonnées cylindriques vu le mouvement attendu.) A priori pas simple.

Ce point est soumis à la force \vec{f} .
 $\vec{f} = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{u}_r$ ou $\vec{f} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \vec{u}_r$.

Définition :

Une force est dite centrale si elle passe constamment par un point fixe 0.

La force est ici une force centrale. Il est donc possible d'exploiter cela pour trouver une loi de conservation.

6.1.2 Etude du moment cinétique.

Appliquons le théorème du moment cinétique.

$$\frac{dL_O}{dt} = M_O(\vec{f}).$$

$$\text{Or } M_O(\vec{f}) = O\vec{M} \wedge \vec{f} = r\vec{u}_r \wedge f \text{vec}u_r = \vec{0}.$$

D'où $\vec{L}_0 = cste$, constante vectorielle. 1ere loi de conservation.

Idée importante : Associer le fait que le point M est soumis à une force centrale et la conservation du vecteur moment cinétique (via le théorème du moment cinétique).

Conséquence :

◇ $\vec{L}_0(t) = \vec{L}_0(t=0) = O\vec{M}(t=0) \wedge m\vec{v}(t=0)$ définit comme axe \vec{u}_z , le mouvement est plan, dans le plan définie par $(O, O\vec{M}(t=0), \vec{v}(t=0))$ qui est le plan perpendiculaire à $\vec{L}_0(t=0)$.

Le mouvement suivant \vec{u}_z est donc sans importance : plus que deux degrés de liberté : r et θ .

◇ $\vec{L}_0(t) = O\vec{M} \wedge m\vec{v} = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z = mr(t=0)^2\dot{\theta}(t=0)\vec{u}_z$ soit $r^2\dot{\theta} = cste = C$. Cette seconde conséquence de conservation est appelée loi des aires.

Les deux degrés de liberté restant r et θ sont liés.

Interprétation de la loi des aires.

L'aire dA balayé par le vecteur $O\vec{M}$ durant dt est $dA = \frac{1}{2}rrd\theta$ d'où $\frac{dA}{dt} = \frac{C}{2}$.

6.2 Etude du mouvement d'un point dans un champ de force central conservatif.

6.2.1 La force $\vec{f} = f(r) \cdot \vec{u}_r$ est conservative.

La norme de \vec{f} ne dépend que de la distance OM.

$$\delta W = P dt = \vec{f} \cdot \vec{v} dt = f(r) \vec{u}_r \cdot (\dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta).$$

Or E_P est définie par $dE_P = -\delta W$.

Soit $dE_P = -f(r) \dot{r} dt = -f(r) dr$.

$$E_P = -\int f(r) dr + cste.$$

Idée importante : Associer le fait que le point M est soumis à une force de la forme $\vec{f} = f(r) \cdot \vec{u}_r$ et le fait que la force dérive d'une énergie potentielle (force conservative).

6.2.2 Etude énergétique.

Intérêt de la méthode énergétique.

La seule force qui s'applique au système est une force conservative.

Mais, a priori, le système possède deux degrés de liberté $r(t)$ et $\theta(t)$ mais cette situation n'est plus exacte car les deux degrés de liberté r et θ sont liés par la loi des aires. Il n'y a donc qu'un seul degré de liberté cinématique à étudier.

Donc l'étude énergétique va pouvoir être menée graphiquement.

Appliquons le théorème de l'énergie mécanique.

$E_m(t) = E_C(t) + E_P(t) = cste$ car il n'y a pas de force non conservative. 2eme loi de conservation.

(Pour calculer la cste, $E_m(t) = E_C(t) + E_P(t) = cste = E_m(t) = E_C(t=0) + E_P(t=0)$.)

$$E_m(t) = E_C(t) + E_P(t) = \frac{1}{2} m v^2 + E_P(t) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + E_P(t).$$

Or $r^2 \dot{\theta} = C$. D'où $\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$.

$$E_m(t) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 (\frac{C}{r^2})^2) + E_P(t).$$

$$E_m(t) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + E_P(t).$$

Définition :

L'énergie potentielle effective est : $E_{P \text{ eff}} = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + E_P(t)$.

$$E_m(t) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{P \text{ eff}}(t).$$

Pour le mouvement radial, tout se passe comme si le mouvement était un mouvement à un degré de liberté dans un potentiel effectif $E_{P \text{ eff}} = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + E_P(t)$ composé de l'énergie potentielle et une partie d'énergie cinétique.

6.2.3 Etude graphique.

Etude pour $E_P(r) = -\frac{k}{r}$ (cas intéressant).

La connaissance de E_P *eff* permet de préciser le domaine du mouvement radial :

Graphique : Etat de diffusion ou état lié.

6.3 Etude du mouvement d'un point dans un champ de force newtonien.

6.3.1 Définition.

Définition : un champ de force est dit newtonien si la force est de la forme $\vec{f} = \frac{k}{r^2}\vec{u}_r$.

Un champ de force newtonien dérive d'une énergie potentielle.

$$\vec{f} = -\frac{dE_P}{dr}\vec{u}_r \text{ ou } f(r) = -\frac{dE_P}{dr} \text{ soit } dE_P = -f(r).dr$$

$$E_P(r) = -\int \frac{k}{r^2}dr + cste = -\frac{k}{r} + cste.$$

Pour déterminer la constante, il faut donner une référence des E_P .

Par convention, la référence des énergies est prise à l'infini. $E_P(r = \infty) = 0$. d'où $cste = 0$.

$$E_P(r) = -\frac{k}{r}$$

Si k est négatif, il s'agit d'une interaction newtonienne attractive.

Exemple 1 : interaction gravitationnelle. $\vec{f} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r$ soit $E_P = -G\frac{Mm}{r}$ avec référence des E_p à l'infini. ($G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ S.I.)

Exemple 2 : interaction coulombienne en deux charges de signe opposé. $\vec{f} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\vec{u}_r$ soit $E_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{r}$ avec référence des E_p à l'infini. ($\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$)

Si k est positif, il s'agit d'une interaction newtonienne répulsive.

Exemple : interaction coulombienne en deux charges de même signe.

6.3.2 Trajectoire dans champ de force newtonien.

Les formules de Binet.

Nous avons déjà exploiter le fait que les deux degrés de liberté r et θ sont liés par la loi des aires. Les formules de Binet permettent de réexploiter cette idée et de simplifier le calcul ultérieur (en particulier le principe fondamental de la dynamique). Cette méthode n'est pas au programme.

Posons $u = \frac{1}{r}$.

Calcul de la vitesse :

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta.$$

$$\text{Or } r^2\dot{\theta} = C \text{ d'où } \dot{\theta} = Cu^2.$$

$$\text{Et } \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{d(1/u)}{d\theta}\dot{\theta} = -C\frac{du}{d\theta}.$$

$$\text{D'où } \vec{v} = -C\frac{du}{d\theta}\vec{u}_r + Cu\vec{u}_\theta.$$

$$\text{Donc } v^2 = C^2\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right).$$

Calcul de l'accélération :

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u}_\theta.$$

L'accélération suivant \vec{u}_θ est nulle. (cf. Loi des aires).

$$\text{Reste à calculer } \ddot{r} = \frac{d}{dt}\left(-C\frac{du}{d\theta}\right) = -C^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}.$$

$$\vec{a} = -C^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)\vec{u}_r.$$

Etude de la trajectoire.

Le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel galiléen donne :

$$m\vec{a} = \vec{f}.$$

Projetons sur les vecteurs :

$$\vec{u}_r : ma_r = -\frac{k}{r^2} \quad (1)$$

$$\vec{u}_\theta : ma_\theta = 0 \quad (2)$$

Exploitation :

(2) permet de retrouver la loi des aires. $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$.

(1) est difficile à exploiter tel quel, mais on sait que les mouvements selon r et θ sont liés, d'où l'idée des formules de Binet.

(1) se réécrit : $mC^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = ku^2$.

Soit $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{k}{mC^2}$.

$u = u_1 + u_2$ avec u_1 , solution de l'équation sans second membre, $u_1(\theta) = A \cos(\theta + \varphi)$ et u_2 une solution particulière, $u_2 = \frac{k}{mC^2}$.

$$u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)} = A \cos(\theta + \varphi) + \frac{k}{mC^2}.$$

Posons $p = \frac{mC^2}{k}$ et $e = pA$, on a alors $\frac{1}{r(\theta)} = \frac{1+e \cos(\theta+\varphi)}{p}$.

Soit finalement $r(\theta) = \frac{p}{1+e \cos(\theta+\varphi)}$. La trajectoire du point M est donc une conique de paramètre p , d'excentricité e , dont l'un des foyers est le point 0.

Remarque :

En décalant l'origine de θ , i.e. en choisissant l'axe de symétrie de la conique comme axe de référence pour la mesure de l'angle polaire, l'équation de la conique se simplifie : $r(\theta) = \frac{p}{1+e \cos \theta}$.

6.3.3 Description des trajectoires.

Calcul de l'énergie mécanique.

$$E_m(t) = E_C(t) + E_P(t) = \frac{1}{2}mv^2 + E_P(t) = \frac{1}{2}mC^2\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right) - ku.$$

Or $u(\theta) = \frac{1+e \cos(\theta+\varphi)}{p}$.

$$E_m(t) = \frac{k^2}{2mC^2}(e^2 - 1).$$

Trajectoire elliptique, e < 1.

Graphique énergétique : état lié. $E_m < 0$.

Apocentre, aphélie : point le plus loin. $r_{max} = \frac{p}{1+e}$.

Péricentre, périhélie : point le plus proche. $r_{min} = \frac{p}{1-e}$.

$$\text{Distance } OF : OF = \frac{r_{min} - r_{max}}{2} = \frac{pe}{(1-e^2)} = c.$$

$$\text{Demi grand axe } a : a = \frac{r_{min} + r_{max}}{2} = \frac{p}{(1-e^2)}.$$

$$\text{Demi petit axe } b : p = \frac{b^2}{a} = \frac{mC^2}{k}.$$

$$\text{Excentricité } e : e = \frac{c}{a}.$$

Remarque : $e = 0$ cercle de centre 0.

Remarque quantique/classique sur energie. Energie classique continue, discrète en méca Q.

Trajectoire hyperbolique, $e > 1$.

Graphique énergétique : état de diffusion. $E_m > 0$ car vient de l'infini avec vitesse non nulle.
 $r > \frac{p}{1+e}$.

Trajectoire parabolique, $e=1$.

Graphique énergétique : état de diffusion. $E_m = 0$ cas particulier où l'objet vient de l'infini avec vitesse nulle.
 $r > \frac{p}{2}$.

6.4 Application à l'étude des mouvements planétaires.

Dans cette partie nous allons étudier, d'une part le mouvement des planètes autour du soleil, d'autre part le mouvement des satellites autour de la terre.

6.4.1 Les loi de Képler.

1ere loi : Le point M possède un mouvement elliptique, dont l'un des foyers est l'astre attracteur.

2eme loi : pendant un intervalle de temps infinitésimal dt , l'aire infinitésimale dA balayée par le vecteur position \vec{OM} est proportionnel à dt .

3eme loi : le rapport $\frac{T^2}{a^3}$ est le même pour tous les objets gravitant autour de l'astre.

Démonstration :

1ere loi : déjà démontrée.

2eme loi : loi des aires $dA = \frac{1}{2} r r d\theta = \frac{C}{2} dt$

3eme loi : Aire ellipse = $\pi ab = \frac{C}{2} T$. D'où $\pi^2 a^2 b^2 = \frac{C^2}{4} T^2$. Or $b^2 = p \cdot a$, d'où $\pi^2 a^2 p \cdot a = \frac{C^2}{4} T^2$ soit $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 p}{C^2} = \frac{4\pi^2}{GM}$. Cette grandeur est indépendante de la masse du point m mais ne dépend que de la masse de l'astre attracteur. Ce rapport est donc le même pour tous les objets gravitant autour de l'astre.

6.4.2 Le cas particulier des satellites en orbite circulaire.

On souhaite étudier le mouvement d'un satellite sur une orbite circulaire, dans le référentiel lié au centre de la terre, qui ne prend pas en compte la rotation de la terre, référentiel supposé galiléen.

Calculer la vitesse v du satellite en fonction de r .

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}.$$

Or en supposant $g_0 \simeq \frac{GM_T}{R_T^2}$.

$$v = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{r}}.$$

Définition :

La première vitesse cosmique est la vitesse d'un satellite en orbite circulaire rasante.

Pour $r = R_T$, $v_{C1} = \sqrt{g_0 R_T}$.

A.N. $7,92 \text{ km.s}^{-1}$.

Calculer la période T de révolution du satellite autour de la terre.

$$T = \frac{2\pi r}{v} \text{ d'où } \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}.$$

Remarque :

Il parfois demander en problème de retrouver la valeur de la constante $\frac{T^2}{a^3}$.

L'idée est de le faire dans le cas particulier du mouvement circulaire qui est très facile.

Calculer l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et l'énergie mécanique du satellite.

$$E_m = \frac{E_P}{2} = -E_C = \frac{mg_0 R_T^2}{2r}. \text{ (Théorème du Viriel).}$$

$E_m < 0$ car état lié.

Définition :

La seconde vitesse cosmique est la vitesse à fournir à un satellite pour qu'il quitte l'attraction de son astre.

Calculer la vitesse à fournir à un satellite pour qu'il quitte l'attraction de son astre.

$$v_{C2} = \sqrt{2g_0 R_T} = \sqrt{2}v_{C1}.$$

A.N. $11,2 \text{ km.s}^{-1}$.

Quel est alors la trajectoire de ce satellite ?

Trajectoire parabolique.

6.5 Exercices.

6.6 Etude de trajectoire d'un satellite.

Un satellite de masse m est lancé depuis la terre, de centre O et de rayon R_T . On notera $k = GM_T$ et C la constante des aires.

Le référentiel géocentrique, lié au centre de la terre est supposé galiléen.

1. Exprimer la force \vec{F} , ainsi que l'énergie potentielle $E_P(r)$. (Attention à la définition de k et penser à préciser l'origine des E_P).
2. La trajectoire est supposée circulaire de rayon r_0 . Donner l'expression de v_0^c la vitesse sur cette trajectoire circulaire.
3. Exprimer E_m^c de ce satellite en orbite circulaire.
De manière plus réaliste, la sonde possède une trajectoire elliptique, de foyer O, d'équation polaire $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$, de paramètre p et d'excentricité k .
On suppose en outre qu'à l'instant $t = 0$, la vitesse est orthoradiale de module v_0 .
4. En revenant au cas particulier d'une orbite circulaire, montrer que $p = \frac{C^2}{k}$.
On admet que $v^2 = C^2((\frac{du}{d\theta})^2 + u^2)$ où $u = \frac{1}{r}$. (Essayez de refaire la démonstration, elle était demandé en "utilisant $\dot{r} = \dot{\theta} \frac{d}{d\theta}(\frac{1}{u})$ ".)
5. En déduire l'expression de E_C en fonction de m, k, C, e et θ .
6. Donner l'expression de E_M en fonction des mêmes paramètres.
7. Déterminer quelle est la valeur de la vitesse initiale v_l correspondant à une trajectoire parabolique.
8. Quelle serait la nature de la trajectoire pour $v > v_l$? Dessiner la.
9. Dessiner l'allure de la trajectoire elliptique en précisant bien où est la terre.
10. Dans le cas ci dessus, donner l'expression de $r_{aphelie}$ et $r_{perihelie}$. Placer les sur le dessin précédent.
11. Calculer la longueur a du demi grand axe de l'ellipse.
12. En comparant cette expression de a et la valeur de E_M trouvée ci avant, exprimer E_M en fonction de a .

6.6.1 Mouvement d'une comète.

La terre T décrit autour du soleil S une trajectoire quasi circulaire de centre S de rayon r_0 . On s'intéresse à une comète de masse m . On la suppose soumise uniquement à l'attraction du soleil. Cette comète possède une trajectoire dont l'équation est une conique $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$.

1. Que représente S pour la conique ?
2. Calculer v_0 la vitesse de la terre sur son orbite circulaire.
3. Sachant que la comète vient de l'infini, quelles trajectoires sont envisageables? Que dire de e ?
La comète passe au plus près du soleil avec une vitesse $v = 2.v_0$ à la distance $r = \frac{r_0}{2}$.
4. La vitesse $2.v_0$ représente-elle la vitesse minimale ou maximale, sur la trajectoire.
5. Calculer l'énergie E_M de la comète.
6. Préciser la trajectoire de la comète : en particulier, préciser la valeur de e et p . Dessiner son allure.

7. Montrer que les deux points où la comète risque d'entrer en collision avec la terre sont diamétralement opposés sur l'orbite terrestre.
8. Discuter de la validité de l'hypothèse " On suppose la comète soumise uniquement à l'attraction du soleil."

6.6.2 Détermination du mouvement d'un satellite.

Un satellite S supposé ponctuel, de masse m , gravite autour de la terre, de centre O de masse M et de rayon R.

A l'instant $t = 0$ pris comme origine des temps, le satellite est situé en un point S_0 , d'altitude h et animé d'une vitesse \vec{v}_0 orthogonale à $O\vec{S}_0$.

1. Montrer que le mouvement de satellite est plan.
2. Dans le plan de la trajectoire, la position de S est repérée par ses coordonnées polaires : (r, θ) . Montrer que $r^2\dot{\theta} = C$ où C désigne une constante que vous déterminerez en fonction de R , h et v_0 .
3. Donner l'expression vectorielle du principe fondamental de la dynamique.
4. En intégrant cette équation, montrer que $\vec{v} = \frac{GM}{C}(\vec{u}_\theta + \vec{e})$ où \vec{e} désigne un vecteur constant, appelé vecteur excentricité, que vous calculerez en fonction de v_0 , C, G, et M.
On pose $e = \frac{\vec{e} \cdot \vec{v}_0}{v_0}$.
5. En projetant \vec{v} sur \vec{u}_θ , montrer que $r = \frac{p}{1+e \cos(\theta-\theta_0)}$. Calculer p et θ_0 .
6. A quelle condition, la position initiale S_0 est elle le périhélie de la trajectoire ?
7. Dans le cas ci dessus, déterminer la position A de l'apogée et la vitesse en ce point.
8. En A, on modifie quasi instantanément la vitesse du satellite pour que la trajectoire soit désormais circulaire. Calculer la variation relative de vitesse.

6.6.3 Erreur de satellisation **.

On souhaite qu'un satellite de masse m possède une orbite circulaire, de rayon r_0 .

1. Calculer la vitesse v_0 qu'il faut communiquer à ce satellite. En déduire E_{M0} et T_0 la période de révolution.
2. En fait, lors de la satellisation, un incident survient, tant et si bien que la vitesse du satellite est très légèrement inférieure à celle prévu $v'_0 = v_0(1 - \epsilon)$ mais la direction de la vitesse est parfaitement orthoradiale à $t = 0$ l'instant de la satellisation. La trajectoire n'est donc pas circulaire mais elliptique.

Sachant que la longueur du demi grand axe de l'ellipse a est liée à l'énergie mécanique par $E_M = -\frac{GMm}{2a}$. Déterminer a en fonction de r_0 et ϵ ainsi que la période T' de révolution.

Chapitre 7

Le changement de référentiel.

Nous avons vu que la vitesse et l'accélération d'un point dépendaient du référentiel d'étude. En mécanique, avec la première loi de Newton, nous avons affirmé (ou postulé) l'existence d'un référentiel galiléen dans lequel le principe d'inertie est vérifiée.

Dans ce chapitre, nous allons étudier comment connaissant le mouvement dans un référentiel R_1 (par rapport à un "observateur"), on en déduit le mouvement dans un autre référentiel R_2 , connaissant le mouvement de R_2 par rapport à R_1 .

Exemple du tapis roulant de la gare Montparnasse.

Lorsque qu'une personne est dans un référentiel en mouvement, il peut avoir la sensation d'éprouver une action particulière. Deux exemples sont à garder en tête tout au long de la leçon, ils vont nous guider dans notre réflexion.

1. Dans une voiture qui freine fort, le passager a la sensation qu'une force le projette vers l'avant.
2. Dans une voiture qui roule vite dans un rond point, le passager a la sensation qu'une force le projette vers l'extérieur du virage.

Ce sont ces deux "sensations" que nous chercherons à expliquer.

7.1 La notion de référentiel.

7.1.1 Définition d'un référentiel.

Le référentiel R est, pour les études en mécanique classique, la définition d'un solide de référence. Un solide est un objet tridimensionnel. Pour décrire son extension spatiale, il faut ses dimensions dans les trois directions de l'espace. Le repère est donc symboliser par un système d'axe : Ox, Oy, Oz

Attention, il n'y a aucun lien entre le référentiel et la base de projection choisie pour étudier le mouvement.

Exemple d'un exercice avec une voiture qui freine fort. Deux référentiels sont possibles, soit le référentiel R_1 lié à la route, soit le référentiel R_2 lié à la voiture.

Le référentiel R_1 possède un mouvement par rapport au référentiel R_2 .

La question qui se pose est comment passer d'un référentiel à un autre, quel est le mouvement du passager dans R_2 connaissant son mouvement dans R_1 .

7.1.2 Définition de quelques référentiels usuels.

Divers référentiels sont couramment utilisés dans les exercices. Voici une liste de ceux ci :

Le référentiel du laboratoire ou référentiel terrestre (= référentiel lié à la route ou à tout objet objet immobile sur terre.) Le point de vue adopté est celui de la personne immobile sur terre. Ce point de vue est le plus naturel pour un terrien.

Le référentiel géocentrique est un référentiel dont l'origine est au centre de la terre et dont les trois axes pointent sur trois étoiles lointaines.

Attention, le référentiel géocentrique ne prend pas en compte la rotation de la terre : dans le référentiel géocentrique, la terre tourne sur elle même en 24h.

Le référentiel héliocentrique est référentiel dont l'origine est au centre du soleil et dont les trois axes pointent sur trois étoiles lointaines.

Dans le référentiel héliocentrique, le référentiel géocentrique effectue un mouvement de révolution en 365,25 jours.

7.2 Description du mouvement d'un solide par rapport à un autre solide.

Pour étudier les changements de référentiels, il faut être en mesure de décrire le mouvement d'un référentiel par rapport à un autre, donc le mouvement d'un solide par rapport à un autre. Conformément aux exigences du programme de première année, nous nous contenterons de décrire deux types de mouvement : le mouvement de translation (le mouvement de la voiture qui freine) et le mouvement de rotation autour d'un axe fixe (le mouvement de la voiture dans le rond point).

7.2.1 Le mouvement de translation.

Définition.

Définition. Le référentiel R' est en mouvement de translation par rapport au référentiel R lorsque les vecteurs $(\vec{u}'_x, \vec{u}'_y, \vec{u}'_z)$ lié aux axes $(O'x', O'y', O'z')$ de R' restent invariant au cours du temps dans le référentiel R .

(Les axes de R' gardent la même direction au cours du temps).

Caractérisation :

Le mouvement du solide S' dans R est, à tout instant, une translation.

Soient A et $B \in S'$, \vec{AB} restent constant au cours du temps dans le référentiel R .

Tous les points du solide S' ont même vitesse dans le référentiel R .

Translation rectiligne.

Exemple : Le référentiel lié à la voiture qui freine est en translation par rapport au référentiel terrestre.

Translation circulaire.

Exemple : Le référentiel lié à la nacelle d'une grande roue est en translation circulaire par rapport au référentiel terrestre.

Exemple : Le référentiel géocentrique est en translation circulaire par rapport au référentiel héliocentrique.

7.2.2 Le mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe.

Définition : Un référentiel R' est en rotation uniforme autour d'un axe fixe

1. s'il existe deux points de S' immobile dans R , qui définissent l'axe de rotation Δ .
2. et si tous les points de S' décrivent une trajectoire circulaire dans un plan orthogonal à Δ , autour de cette axe.

Caractérisation :

Tout point M de S' décrit un cercle de centre H , de rayon HM . (H désigne la projection orthogonale de M sur Δ .)

7.3 Changement de référentiel : composition des mouvements.

7.3.1 Dérivation vectorielle lors d'un changement de référentiel.

Pour caractériser le mouvement d'un référentiel R' (lié à un solide S') par rapport à un référentiel R , il faut définir la vitesse de rotation $\vec{\Omega}_{S'/S} = \vec{\Omega}_{R'/R}$.

Théorème de dérivation vectorielle :
Soit \vec{A} un vecteur quelconque :

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{A}$$

Admis.

Application :
 $\left(\frac{d\vec{u}_r}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{u}_r}{dt}\right)_{R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{u}_r = 0 + \dot{\theta}\vec{u}_z \wedge \vec{u}_r = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$
Donne l'idée de la démonstration de la formule.

7.3.2 Description du mouvement dans les référentiels.

Soient deux référentiels R (Ox, Oy, Oz) et R' ($O'x', O'y', O'z'$). R est appelé référentiel absolu (référentiel que l'on suppose galiléen) et R' le référentiel relatif. R' est en mouvement par rapport à R , caractérisé par $v_{O'/R}$ et $\vec{\Omega}_{R'/R}$.

Le mouvement dans R est appelé mouvement absolu. $O\vec{M}(t)$ décrit le mouvement absolu, $\vec{v}_R = \left(\frac{dO\vec{M}}{dt}\right)_R$ est la vitesse absolu et \vec{a}_R l'accélération absolue.

Le mouvement dans R' est appelé mouvement relatif. $O'\vec{M}'(t)$ décrit le mouvement relatif, $\vec{v}'_{R'} = \left(\frac{dO'\vec{M}'}{dt}\right)_{R'}$ est la vitesse relatif et $\vec{a}'_{R'}$ l'accélération relative.

Le mouvement de R' par rapport à R est appelé mouvement d'entraînement.

7.3.3 Composition des vitesses.

7.3.4 Formule générale.

$\vec{v}_R = \left(\frac{dO\vec{M}}{dt}\right)_R = \left(\frac{dO\vec{O}'}{dt}\right)_R + \left(\frac{dO'\vec{M}'}{dt}\right)_R = \vec{v}_{O'/R} + \left(\frac{dO'\vec{M}'}{dt}\right)_{R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge O'\vec{M}'$
D'où :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \text{ avec } \vec{v}_e = \vec{v}_{O'/R} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge O'\vec{M}'$$

\vec{v}_e s'appelle la vitesse d'entraînement.

Le point coïncident.

Définition : Le point coïncident P est le point fictif qui coïncide à tout instant avec le point M étudié mais qui est lié au solide S'.

Le point fictif est donc le point qui suit le mouvement du point M étudié mais qui est supposé attaché au solide S', donc immobile dans le référentiel R' lié au solide S'.

Application : $\vec{v}_{P/R} = \vec{v}_{O'/R} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge O'\vec{P}$ d'après la formule de mécanique du solide (Torseur cinématique).

Propriété : Le mouvement du point P est le mouvement d'entraînement.

7.3.5 Composition des accélérations.

$$\begin{aligned} \vec{a}_R &= \frac{d\vec{v}_R}{dt})_R = \frac{d\vec{v}'_{R'}}{dt})_R + \frac{d\vec{v}_{O'/R}}{dt})_R + \frac{d\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge O'\vec{M}}{dt})_R \\ &= \frac{d\vec{v}'_{R'}}{dt})_{R'} + \Omega_{R'/R} \wedge \vec{v}'_{R'} + \vec{a}_{O'/R} + \frac{d\vec{\Omega}_{R'/R}}{\wedge} O'\vec{M} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \frac{O'\vec{M}}{dt})_R \\ &= \vec{a}'_r + \Omega_{R'/R} \wedge \vec{v}'_{R'} + \vec{a}_{O'/R} + \frac{d\vec{\Omega}_{R'/R}}{\wedge} O'\vec{M} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge (\vec{v}_{O'/R} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge O'\vec{M}) \end{aligned}$$

D'où

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c \quad \text{avec}$$

$$\vec{a}_e = \vec{a}_{O'/R} + \frac{d\vec{\Omega}_{R'/R}}{\wedge} O'\vec{M} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge (\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge O'\vec{M})$$

$$\vec{a}_c = 2\Omega_{R'/R} \wedge \vec{v}'_r$$

Ces formules ne sont pas à savoir (ouf!). La démonstration n'est pas exigible.

La démonstration vous permet de voir que ce que je fais est justifié mathématiquement.

En particulier vous devez savoir que $\frac{d\vec{v}_e}{dt} \neq \vec{a}_e$.

7.3.6 Étude du cas de la translation.

Le référentiel R' est en translation par rapport au référentiel R. (Translation rectiligne ou translation circulaire.) Donc $\Omega_{R'/R} = \vec{0}$.

D'où

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \quad \text{avec } \vec{v}_e = \vec{v}_{O'/R}$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c \quad \text{avec } \vec{a}_e = \vec{a}_{O'/R} \text{ et } \vec{a}_c = \vec{0}$$

Remarque : dans le cas d'un référentiel R' en translation rectiligne uniforme, on trouve que $\vec{a}_a = \vec{a}_r$.

7.3.7 Etude du cas de la rotation uniforme par rapport à un axe fixe.

$$\begin{aligned}\vec{v}_a &= \vec{v}_e + \vec{v}_r \text{ avec } \vec{v}_e = \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge O'\vec{M} = \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge H\vec{M} \\ \vec{a}_a &= \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c \text{ avec} \\ \vec{a}_e &= \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge (\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge O'\vec{M}) = -\Omega_{R'/R}^2 H\vec{M} \\ \vec{a}_c &= 2\Omega_{R'/R} \wedge \vec{v}_r\end{aligned}$$

7.4 Le principe fondamental de la dynamique et autres théorèmes dans les référentiels non galiléens.

7.4.1 Forces d'inertie dans un référentiel non galiléen.

Soit R un référentiel galiléen, et R' un référentiel en mouvement par rapport à R. La deuxième loi de Newton (ou principe fondamental de la dynamique) donne :

$$m\vec{a}_a = \sum \vec{f}.$$

$$\text{Or } \vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c.$$

$$m\vec{a}_r + m\vec{a}_e + m\vec{a}_c = \sum \vec{f}.$$

$$\text{D'où } m\vec{a}_r = \sum \vec{f} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c.$$

Définitions :

La force d'inertie d'entraînement est $\vec{f}_{i.e.} = -m\vec{a}_e$.

La force d'inertie de Coriolis est $\vec{f}_{i.c.} = -m\vec{a}_c$.

Le principe fondamental de la dynamique dans un référentiel R' non galiléen s'écrit donc :

$$m\vec{a}_r = \sum \vec{f} + \vec{f}_{i.e.} + \vec{f}_{i.c.}$$

Remarque : ces forces ne sont pas des forces "vraies". Elles ne proviennent d'aucune des quatre interactions fondamentales que nous avons énoncées en mécanique 1. Elles sont le fruit d'un jeu de réécriture du pfd afin de calculer plus aisément l'accélération relative. Vous les appellerez à l'oral : "pseudo-forces".

7.4.2 Etude du cas de la translation.

Le référentiel R' est en translation par rapport au référentiel R. (Translation rectiligne ou translation circulaire.) Donc $\Omega_{R'/R} = \vec{0}$.

$$\vec{f}_{i.e.} = -m\vec{a}_{O'/R} \text{ et } \vec{f}_{i.c.} = \vec{0}$$

Exemple : le cas de la voiture en décélération.

Voiture à 50 km/h freine en 25m environ. Quelle est la force subie par le conducteur de masse $m_1 = 80kg$ par la ceinture et quel serait la force que la maman qui tient le bébé de masse $m_2 = 5kg$ dans ses bras devrait exercer pour éviter à son bébé de passer à travers le pare-brise? (Faire la rédaction complète)

Considérons le passager supposé ponctuel, point M, de masse m dans le référentiel R' lié à la voiture.

Ce référentiel est en mouvement de translation par rapport au référentiel de la route supposé galiléen.

Pour décrire ce mouvement, il faut obtenir $x(t)$.

Ce point est soumis aux forces suivantes : \vec{P} , \vec{N} , $\vec{F}_{retient}$, $\vec{f}_{i.e} = -m\vec{a}_{O'/R}$ et $\vec{f}_{i.c} = \vec{0}$.

Le principe fondamentale de la dynamique donne $m\vec{a}_r = \sum \vec{f} + \vec{f}_{i.e} + \vec{f}_{i.c}$.

7.4.3 Etude du cas de la rotation uniforme par rapport à un axe fixe.

$$\vec{f}_{i.e} = m\Omega_{R'/R}^2 H\vec{M} \text{ et } \vec{f}_{i.c} = -2m\Omega_{R'/R} \wedge \vec{v}_r$$

Exemple : le cas de la voiture dans un rond point.

Voiture à 50 km/h roule dans un rond point de rayon $R = 20m$. Quelle est la force subie par le conducteur de masse $m_1 = 80kg$ par la ceinture? (Faire rédaction complète)

7.4.4 Le théorème du moment cinétique.

Théorème du moment cinétique par rapport à un point A immobile dans le référentiel R' non galiléen :

Considérons le point M, de masse m et de quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}_r$ par rapport au référentiel R' non galiléen, soumis à une force \vec{f} dans le référentiel R'. Soit A un point immobile dans le référentiel R'.

$$\left(\frac{d\vec{L}_A}{dt}\right)_{R'} = \vec{M}_A(\vec{f}) + \vec{M}_A(\vec{f}_{i.e.}) + \vec{M}_A(\vec{f}_{i.c.}).$$

Démonstration :

$$\left(\frac{d\vec{L}_A}{dt}\right)_{R'} = \frac{d}{dt}(A\vec{M} \wedge m\vec{v}_r) = \vec{v}_r \wedge m\vec{v}_r + A\vec{M} \wedge m\frac{d\vec{v}_r}{dt} = 0 + A\vec{M} \wedge (\vec{f} + \vec{f}_{i.e.} + \vec{f}_{i.c.}).$$

7.4.5 Le théorème de l'énergie cinétique.

De même que dans le théorème du moment cinétique, il faudrait faire intervenir $P(\vec{f}_{i.e.})$ et $P(\vec{f}_{i.c.})$.

Le théorème de l'énergie cinétique :

Dans le référentiel R' non galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel de masse m entre deux instants (ou deux positions) est égale à la somme des travaux des forces appliquées entre

ces deux instants, ainsi que le travail de la force d'inertie d'entraînement.

$$\begin{aligned}\frac{dE_C}{dt} &= P(\vec{f}) + P(\vec{f}_{i.e.}) \\ dE_C &= P(\vec{f})dt = \delta W(\vec{f}) + \delta W(\vec{f}_{i.e.}) \\ \Delta E_C &= E_C(t_2) - E_C(t_1) = W_{1 \rightarrow 2}(\vec{f}) + W_{1 \rightarrow 2}(\vec{f}_{i.e.})\end{aligned}$$

Démonstration :

$$\frac{dE_C}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_r^2 \right) = \vec{v}_r \cdot m \frac{d\vec{v}_r}{dt}.$$

$$\frac{dE_C}{dt} = P(\vec{f}) + P(\vec{f}_{i.e.}) + P(\vec{f}_{i.c.}).$$

$$\text{Mais } P(\vec{f}_{i.c.}) = \vec{v}_r \cdot (-m\vec{a}_C) = \vec{v}_r \cdot (-2m\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_r) = 0.$$

Le théorème de l'énergie mécanique :

Dans un référentiel R' non galiléen, la variation d'énergie mécanique d'un point matériel de masse m entre deux instants est égale à la somme des travaux des forces non conservatives appliquées entre ces deux instants, ainsi que le travail de la force d'inertie d'entraînement.

$$\begin{aligned}\frac{dE_M}{dt} &= P(\vec{f}_{non\ conservative}) + P(\vec{f}_{i.e.}) \\ dE_M &= P(\vec{f}_{non\ conservative})dt = \delta W(\vec{f}_{non\ conservative}) + \delta W(\vec{f}_{i.e.}) \\ \Delta E_M &= E_M(t_2) - E_M(t_1) = W_{1 \rightarrow 2}(\vec{f}_{non\ conservative}) + W_{1 \rightarrow 2}(\vec{f}_{i.e.})\end{aligned}$$

Etude du cas de la rotation uniforme par rapport à un axe fixe.

La force d'inertie d'entraînement dérive d'une énergie potentielle.

$$\vec{f}_{i.e.} = m\Omega_{R'/R}^2 H\vec{M}$$

$$\text{D'où } \delta W(\vec{f}_{i.e.}) = \vec{f}_{i.e.} \cdot dH\vec{M} = m\Omega_{R'/R}^2 H\vec{M} \cdot dH\vec{M}.$$

$$\text{Il existe une énergie potentielle } E_P \text{ ssi } dE_P = -\delta W(\vec{f}_{i.e.}) = -m\Omega_{R'/R}^2 H\vec{M} \cdot dH\vec{M} = d\left(\frac{1}{2}mHM^2\right).$$

Dans le cas d'un référentiel R' en mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel galiléen R_G , la force d'inertie d'entraînement dérive d'une énergie potentielle.

7.5 Etude de référentiels particuliers.

7.5.1 Les référentiels galiléens.

Un référentiel galiléen est défini par le principe d'inertie ou première loi de Newton : le mouvement d'un point matériel isolé est rectiligne uniforme dans R_G .

Théorème :

R'_G est en translation rectiligne uniforme par rapport à R_G galiléen est équivalent à R_G et R'_G sont galiléens.

Démonstration de la double implication.

◊ Considérons deux référentiels galiléens R_G et R'_G (en translation par rapport à R_G).

Etudions le mouvement d'un point M mécaniquement isolé.

La loi de composition des vitesses donne $\vec{v}_{M/R_G} = \vec{v}_{M/R'_G} + \vec{v}_{O'/R}$

. Soit $\vec{v}_{O'/R} = \vec{v}_{M/R_G} - \vec{v}_{M/R'_G}$.

Or comme R_G et R'_G sont galiléens, $\vec{v}_{M/R_G} = c\vec{ste}$ et $\vec{v}_{M/R'_G} = c\vec{ste}'$.

D'où $\vec{v}_{O'/R} = c\vec{ste}''$.

R_G et R'_G sont galiléens, implique R'_G est en translation rectiligne uniforme par rapport à R_G .

◊ Réciproquement, considérons deux référentiels R_G galiléen et R' en translation rectiligne uniforme par rapport à R_G .

Etudions le mouvement d'un point M mécaniquement isolé.

La loi de composition des vitesses donne $\vec{v}_{M/R_G} = \vec{v}_{M/R'} + \vec{v}_{O'/R}$

. Soit $\vec{v}_{M/R'} = \vec{v}_{M/R_G} - \vec{v}_{O'/R} = c\vec{ste}$.

Le mouvement du point M mécaniquement isolé est rectiligne uniforme d'où R' est galiléen.

R' est en translation rectiligne uniforme par rapport à R_G galiléen implique R_G et R'_G sont galiléens.

Conséquence.

Si un référentiel galiléen est connu, il est possible de déduire tous les autres référentiels galiléens.

Considérons deux référentiels galiléens R_G et R'_G (en translation par rapport à R_G).

Etudions le mouvement d'un point M.

La loi de composition des accélérations donne $\vec{a}_{M/R_G} = \vec{a}_{M/R'_G}$

. La résultante des forces étant indépendante du référentiel choisi :

$$m\vec{a}_{M/R_G} = m\vec{a}_{M/R'_G} = \sum \vec{f}$$

Théorème :

Le principe fondamental de la dynamique est invariant par changement de référentiel galiléen.

Remarque pour votre culture :

Einstein généralise cette idée naturelle et postule que toutes les lois physiques sont invariantes par changement de référentiel galiléen.

De ce postulat naît la relativité restreinte (restreinte en ce sens que restreinte aux changements de référentiel galiléen.) : il suffit de dire que la vitesse de la lumière est invariante par changement de référentiel galiléen.

7.5.2 Mouvement relatif des référentiels particuliers.

Référentiel du laboratoire est identique au référentiel terrestre.

Référentiel terrestre est en mouvement de rotation uniforme autour du référentiel géocentrique. (rotation en 24h.)

Référentiel géocentrique est en mouvement de translation circulaire autour du référentiel héliocentrique. (rotation en 365, 25*j*. 365 jours 6 heures 9 minutes et 9,5 secondes)

Référentiel héliocentrique est en mouvement de translation circulaire autour du référentiel lié au coeur de la galaxie (250 km/s, million d'année pour rotation des galaxies spirales, Sa forme est un disque de 25 kpc de diamètre comportant un bulbe central, lui-même entouré d'un halo sphérique de faible densité de 30 kpc ($3 \cdot 10^{16} m \simeq 3$ année lumière) de diamètre. Elle contient entre 200 et 400 milliards d'étoiles, dont notre Soleil, pour une masse totale évaluée de l'ordre de 750 à 1 000 milliards de masses solaires.), et puis les galaxies sont en mouvement...

La question est : quel est le référentiel galiléen ?

Réponse : personne. Aucun des référentiels cités n'est rigoureusement galiléen. Mais selon l'expérience, il est possible avec une bonne approximation de considérer tel ou tel référentiel comme galiléen.

Pour les exercices qui vont nous préoccuper dans un premier temps, nous verrons que le référentiel terrestre (ou celui du laboratoire) constitue en première approximation de bons référentiels galiléen, sauf mention explicite de l'énoncé.

Nous mettrons en exergue le caractère non galiléen du référentiel terrestre dans un chapitre particulier, ce qui nous permettra de donner plus précisément un critère de validité au caractère galiléen ou non du référentiel.

7.6 Résolution des exercices.

Considérons le passager supposé ponctuel, point M, de masse m dans le référentiel R' lié à la voiture.

Ce référentiel est en mouvement de translation par rapport au référentiel de la route supposé galiléen. Pour décrire ce mouvement, il faut obtenir $x(t)$.

Ce point est soumis aux forces suivantes : \vec{P} , \vec{N} , \vec{F}_{retient} , $\vec{f}_{i.e} = -m\vec{a}_{O'/R}$ et $\vec{f}_{i.c} = \vec{0}$.

Le principe fondamentale de la dynamique donne $m\vec{a}_r = \sum \vec{f} + \vec{f}_{i.e} + \vec{f}_{i.c}$.

1. Faire un schéma.

2. Le référentiel :

”Considérons le système ponctuel M de masse m dans le référentiel R' ”

Quel est le mouvement du référentiel R' par rapport au référentiel galiléen R_G ?

Soit translation (rectiligne, rectiligne uniforme, circulaire), soit rotation (rotation uniforme autour d'un axe fixe.)

”Le référentiel est (ou n'est pas) galiléen.”

3. Bilan des inconnues cinématiques :

”Pour décrire ce mouvement, il faut obtenir”

4. Bilan des forces

”Ce point est soumis aux forces suivantes :”

Préciser $\vec{f}_{i.e} =$ et $\vec{f}_{i.c} =$ au besoin.

5. Ecrire la deuxième loi de Newton (= principe fondamental de la dynamique)
Equation vectorielle.
6. Projeter dans le système d'axe adapté, (indépendant du choix du référentiel).
Une ou plusieurs equations scalaire.

TD :

La vigie du bateau qui lâche un cailloux. Etude dans les deux ref.

Les ascenseurs d'Einstein. Etude dans les deux ref.

Le camion qui démarre et la caisse.

Un ref tournant à trouver autre que cercle.

7.7 Exercices.

7.7.1 Jeu dans un train.

Un enfant(futur physicien) joue avec une balle rebondissante dans un TGV en mouvement. Il lâche sans vitesse sa balle d'un point M_0 à une hauteur $h = 1m$.

Partie I.

Dans cette partie, le train est supposé roulé à sa vitesse de croisière $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$. On suppose le référentiel terrestre R galiléen.

1. On souhaite dans un premier temps étudier le mouvement dans le référentiel R. Etudier le mouvement. Déterminer en particulier le point d'impact de la balle sur le sol par rapport au point M_1 , point du plancher à la verticale de M_0 dans le train.
2. Définir un nouveau référentiel R'.
3. Quel est le mouvement de R' par rapport à R. Qu'en conclure?
4. Reprenez l'étude de la chute dans le référentiel R'. Déterminer en particulier le point d'impact de la balle sur le sol par rapport au point M_1 , point du plancher à la verticale de M_0 dans le train.
5. Comparer les résultats de la question 1 et 3. Justifier l'intérêt des changements de référentiels.

Partie II.

Dans cette partie, le train est supposé accéléré $\vec{a}_0 = a_0\vec{u}_x$. On suppose toujours le référentiel terrestre R galiléen.

1. Que dire du référentiel R'.
2. Reprenez l'étude de la chute dans le référentiel R' dans ces nouvelles conditions. Déterminer en particulier le point d'impact de la balle sur le sol par rapport au point M_1 , point du plancher à la verticale de M_0 dans le train.
3. Comparer aux résultats de la partie I.

4. Décrire succinctement votre sensation personnelle lorsque le train accélère et interpréter à partir des résultats obtenus précédemment.

7.7.2 Etude d'un équilibre relatif.

Un enfant (toujours le même), las de jouer à la balle rebondissante et de courir après, s'amuse avec un pendule. Le TGV est supposé accéléré $\vec{a}_0 = a_0\vec{u}_x$. On suppose là encore le référentiel terrestre R galiléen.

1. Justifier pour l'étude du mouvement l'intérêt d'utiliser le théorème du moment cinétique.
2. Déterminer l'angle d'inclinaison θ_{eq} du fil à l'équilibre dans le train.
L'équilibre décrit ici est appelé équilibre relatif puisqu'il fait référence à un état d'équilibre dans le référentiel relatif R'.
3. En écartant le pendule de sa position d'équilibre θ_{eq} , on observe des petites oscillations. Est ce normal ?
4. Déterminer la période T des oscillations dans le référentiel R'.
On introduira $u = \theta - \theta_{eq}$

7.7.3 Anneau sur une barre tournante.

Une barre métallique de longueur l que l'on confondra avec l'axe \vec{u}_X (horizontale) est en rotation uniforme autour d'une de ses extrémités, à la vitesse angulaire $\Omega\vec{u}_z$. (\vec{u}_z vertical) Sur cette barre, un anneau glisse sans frottement, il est donc astreint à se déplacer suivant l'axe de la barre.

1. Justifier pour ce problème l'intérêt d'une étude énergétique.
2. Déterminer les positions d'équilibre relatif ainsi que leur stabilisé
3. Déterminer l'équation du mouvement.
4. A $t=0$, l'anneau est immobile, distant de O de ε . Donner l'expression de la position en fonction de t.

7.7.4 Démarrage d'un camion.

Un camionneur a omis de fixer une caisse supposée ponctuelle de masse m à l'arrière de son camion. Cette caisse possède un frottement solide avec la plateau du camion caractérisé par un coefficient de frottement f. Le camion démarre avec une accélération $\vec{a}_0 = a_0\vec{u}_x$

1. Dans le cas du glissement, rappeler le lien entre la force de frottement \vec{T} et la réaction normale au support \vec{N} . Rappeler aussi comment doit être orienté \vec{T} .
2. Qualitativement, sans calcul, en supposant le frottement très faible, décrire le mouvement de la caisse.
3. Toujours sans calcul, en supposant le frottement très important, décrire le mouvement de la caisse.

4. Compte tenu de la question 1, dessiner sur un schéma la direction de la force \vec{T}
5. Etudier le mouvement de la caisse par rapport au plateau du camion. Déterminer quel peut être l'accélération maximale pour éviter que la caisse ne tombe.

7.8 Etude d'un équilibre relatif.

Un fil de fer de formant un cercle de rayon R , est en rotation uniforme à la vitesse de rotation $\Omega \vec{u}_z$ autour d'un axe fixe comme indiqué sur la figure. Une perle est glissée sur le cercle (Elle ne peut donc pas décoller) et son mouvement est repéré par un angle θ .

1. Définir le référentiel R' dans lequel la perle supposée ponctuelle va pouvoir être à l'équilibre. Que dire de R' ?
2. Déterminer la position d'équilibre de la perle dans R' .
3. Déterminer sa stabilité. (Tracer l'allure de l'énergie potentielle).
4. ★ Etudier au voisinage de la position d'équilibre l'allure et la période des petites oscillations. Commenter.

Chapitre 8

Etude dans le référentiel terrestre et géocentrique.

Dans le chapitre précédent, j'ai défini différents référentiels usuels : référentiel de Copernic, référentiel héliocentrique, référentiel géocentrique et le référentiel terrestre, et j'ai étudié le mouvement des référentiels les uns par rapport aux autres.

Mais ce qui est essentiel pour étudier la dynamique d'un point dans ces référentiels est de savoir si le référentiel est galiléen.

Le référentiel terrestre et géocentrique sont ils galiléen ?

A priori le référentiel terrestre et le référentiel géocentrique ne sont pas galiléen. Dans une première partie du cours, nous allons mettre en évidence par des expériences ce caractère non galiléen du référentiel terrestre et géocentrique.

Quel phénomène met en évidence ce caractère non galiléen du référentiel géocentrique ?

Marée.

Pourquoi les marées durent 12 h alors que la terre tourne sur elle même en 24 h ?

Quel phénomène met en évidence ce caractère non galiléen du référentiel terrestre ?

Pendule de Foucault et déviation vers l'Ouest.

Mais dans la première partie du cours, nous avons des études dans le référentiel terrestre en le supposant galiléen et nous avons obtenu des résultats tout à fait cohérents, preuve que sous certaines conditions, il est possible de considérer le référentiel comme galiléen. Nous allons donc dans ce chapitre tenter d'élucider ces conditions.

8.1 Etude dans le référentiel géocentrique : le terme de marée.

8.1.1 Position du problème.

Quel est l'astre responsable des marées ?

La lune.

Quel est l'astre responsable du mouvement de la terre ? (Autour de quel astre la terre tourne-t-elle ?)

Le Soleil.

Le soleil détermine donc le mouvement de la terre, elle a donc un effet prédominant : calcul ordre de grandeur. Comment se fait-il que la lune influe sur la terre plus que le soleil quand on s'intéresse aux marées ?

Pourquoi les marées durent 12 h alors que la terre tourne sur elle-même en 24 h ?

Voilà des questions qui amènent le physicien à s'interroger.

Que souhaite-on étudier ? Quel est la question et quel est le système d'étude ?

De quel système souhaite-on étudier le mouvement ? Sur quel système souhaite-on faire un bilan des forces.

De l'eau. Donc le système d'étude est une masse m d'eau de l'océan supposée ponctuelle.

Dans quel référentiel souhaite-on étudier le mouvement ?

Référentiel géocentrique.

On va supposer le référentiel conformément au programme que le référentiel héliocentrique est galiléen.

8.1.2 Etude dans le référentiel géocentrique : terme de marée.

Prendre M_1 sur l'équateur.

Considérons une masse m d'eau supposée ponctuelle M_1 dans le référentiel R' géocentrique.

Le référentiel R' est en mouvement de translation circulaire dans le référentiel héliocentrique R galiléen.

Le référentiel R' est donc non galiléen.

Pour décrire le mouvement de ce point, il faut \vec{a}_r .

Ce point est soumis à :

- la force d'attraction terrestre $-m \frac{G \cdot M_T}{R_T^2} u_{TM} = m \vec{G}_T(M)$.

Définition :

$\vec{G}_T(M)$ désigne la valeur du champ de gravitation de la terre au point M.

- la force d'attraction du soleil $m\vec{G}_S(M)$.
- la force d'attraction de la lune $m\vec{G}_L(M)$.
- la force de cohésion de l'eau \vec{f} .
- la force d'inertie d'entraînement $\vec{f}_{i.e.} = -m\vec{a}_e = -m\vec{a}_{T/R}$.
- la force d'inertie de Coriolis $\vec{f}_{i.c.} = -m\vec{a}_c = \vec{0}$.

Le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel R' non galiléen.

$$m\vec{a}_r = m\vec{G}_T(M) + m\vec{G}_L(M) + m\vec{G}_L(M) + \vec{f} - m\vec{a}_{T/R} \quad (1)$$

Reste alors à exprimer $\vec{a}_{O'/R}$.

Considérons la terre supposée ponctuelle dans le référentiel R héliocentrique galiléen.

Pour décrire le mouvement de ce point, il faut $\vec{a}_{T/R}$.

Ce point est soumis à :

- la force d'attraction du soleil $m\vec{G}_S(T)$.
- la force d'attraction de la lune $m\vec{G}_L(T)$.

Le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel R galiléen.

$$M_T\vec{a}_{T/R} = M_T\vec{G}_L(T) + M_T\vec{G}_L(T)$$

d'où

$$\vec{a}_{T/R} = \vec{G}_L(T) + \vec{G}_L(T) \quad (2)$$

En reportant cette expression dans (1) :

$$m\vec{a}_r = m\vec{G}_T(M) + m(\vec{G}_L(M) - \vec{G}_L(T)) + m(\vec{G}_L(M) - \vec{G}_L(T)) + \vec{f}$$

Définition :

Le terme de marée dû à l'astre A est la différence entre le vecteur champ de gravitation dû à l'astre A en M, un point à la surface de la terre, et du vecteur champ de gravitation dû à l'astre A en T, le centre de la terre.

$$\vec{\delta}_A(M) = \vec{G}_A(M) - \vec{G}_A(T).$$

Remarque :

Le terme de marée est un terme différentiel et il s'agit d'une différence de vecteur. Le terme de marée est donc parfois nommé "terme différentiel de marée".

8.1.3 Interprétations et conséquences du termes de marée.

Le terme différentiel de marée $\vec{\delta}_A(M)$ dépend du point M où il est calculé.

Calculons le en deux points M_1 et M_2 diamétralement opposés de l'équateur.

(On suppose que le plan de rotation de la lune est confondu avec le plan équatorial). $\vec{\delta}_A(M_1) =$

$$\begin{aligned} & \vec{G}_A(M_1) - \vec{G}_A(T) \\ \vec{\delta}_A(M_1) &= G_A(M_1)\vec{u}_x - G_A(T)\vec{u}_x \\ \vec{\delta}_A(M_1) &= \left(\frac{GM_A}{(D-R_T)^2} - \frac{GM_A}{(D)^2} \right) \vec{u}_x \\ \vec{\delta}_A(M_1) &= \frac{2GM_A R_T}{D^3} \vec{u}_x \end{aligned}$$

Le même calcul en M_2 donne :

$$\vec{\delta}_A(M_2) = -\frac{2GM_A R_T}{D^3} \vec{u}_x$$

Comparons l'influence relative du soleil et de la lune.

Calcul du champ de gravitation dû à la lune et au soleil. Conclusion : le soleil exerce un champ plus important.

Calcul du terme différentiel de marée dû à la lune et au soleil. Conclusion : la lune, du fait de sa proximité avec la terre, donne naissance à un terme de marée plus important que le soleil. $\delta_L \cdot 0,45 \simeq \delta_S$.

Réponse au premier paradoxe. La lune joue donc un rôle prédominant pour les marées.

Regardons l'influence de la lune sur les océans.

La résultante de ce terme de marée déforme donc la terre selon le dessin ci contre.

L'action gravitationnelle de la lune donne naissance à deux bourrelets océaniques.

En outre, compte tenu des symétries du problème de départ, ces bourrelets océaniques possèdent une symétrie de révolution autour de l'axe OL.

Au cours de la rotation terrestre, chaque point M passe toutes les 12 heures au niveau d'un bourrelet, ce qui correspond donc à une marée haute toutes les 12 heures, donc les marées possèdent une période de 12h alors que la période de révolution de la terre est de 24h. Réponse à la seconde question paradoxale.

Pour aller un peu plus loin :

La période des marées est elle exactement de 12h ?

Non, sinon la marée haute aurait lieu tous les jours à la même heure.

Pourquoi ?

Ceci est dû à la rotation de la lune autour de la terre en 28 jours approximativement.

On a donc un décalage de Δt de $\frac{24.6028}{24} \simeq 50mn$.

En outre, toutes les marées sont elles équivalentes ?

Non, les marées diffèrent dans leur amplitude, comme le prouve le coefficient de marée.

Pourquoi ?

L'influence du soleil n'est pas négligeable dans les marées $\delta_L.0,45 \simeq \delta_S$. D'où les vives eaux à la nouvelle lune et la pleine lune, et les mortes eaux lors du premier et du dernier quartier de la lune.

Schéma.

Les marées sont elles les mêmes partout ?

Non, en méditerranée, pas de marée, dans la baie du mont Saint Michel, amplitude exceptionnel.

Pourquoi ? Il existe un phénomène de résonance avec les ondes de marées qui déterminent l'amplitude mesurée en un lieu donné de la marée. Le coefficient de marée ne donne que la variation relative d'amplitude.

Il existe d'autres manifestations du phénomène de marée. Lesquels ?

Les anneaux de Saturne.

8.1.4 Les anneaux de saturne et la limite de Roche.

Si l'eau de la terre n'est pas arraché à la terre par la force de marée, c'est parce que la terre exerce sur cette eau une force bien supérieure au terme de marée.

$$\delta_L(M) \simeq 10^{-7} G_T(M).$$

Mais si l'on considère une petite pierre de masse m posée sur une satellite de masse M de Saturne dans le référentiel R' lié à ce satellite.

Ce satellite et donc le référentiel R' est en mouvement de translation circulaire autour du référentiel R lié à Saturne supposé galiléen.

Un bilan des forces donne :

la force exercé par le satellite sur m : $m\vec{G}_{sat}(M)$.

la force d'attraction de Saturne $m\vec{G}_S(M)$.

la force de réaction du satellite sur m : \vec{N} .

la force d'inertie d'entraînement $\vec{f}_{i.e.} = -m\vec{a}_e = -m\vec{a}_{O'/R}$.

la force d'inertie de Coriolis $\vec{f}_{i.c.} = -m\vec{a}_c = \vec{0}$.

En appliquant le pfd au satellite de masse M dans le ref R galiléen :

$$\vec{a}_{O'/R} = \vec{G}_S(O').$$

D'où le pfd à la masse m dans le référentiel R' non galiléen donne :

$$m\vec{a}_r = \vec{N} + m\vec{G}_{sat}(M) + m\vec{G}_S(M) - m\vec{G}_S(O').$$

Et on identifie le terme de marée. Si ce terme devient en module supérieur à l'attraction du satellite sur lequel la pierre est posée, la pierre s'éloigne du satellite.

On dit que le satellite se disloque.

On définit la distance de Roche comme la distance entre le satellite et la planète, tel que le terme de marée compense exactement l'attraction du satellite.

Saturne est une planète dite géante et donc les satellites qui gravitent autour se trouvent à une distance inférieure à la limite de Roche et ils se sont disloqués, donnant naissance aux anneaux de Saturne.

8.1.5 Caractère galiléen approché du référentiel géocentrique.

Par le phénomène de marée lié à l'existence d'un terme différentiel de marée, on met en évidence le caractère non galiléen du référentiel géocentrique.

Néanmoins, hormis ce phénomène, l'influence de ce terme pour les activités terrestres est négligeable. $\delta_L(M) \simeq 10^{-7} G_T(M)$.

Il est donc possible de considérer avec une très bonne approximation que ce référentiel est galiléen.

8.2 Etude dans le référentiel terrestre.

8.2.1 Etude du cas statique : définition du champ de pesanteur

. Faire un grand schéma avec la latitude λ . Définir $\Omega = \frac{2\pi}{T}$.

Considérons un pendule de masse m dans le référentiel terrestre R' en supposant le référentiel R géocentrique galiléen.

(Quel est le mouvement du référentiel terrestre par rapport au référentiel géocentrique galiléen?)

R' est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport au référentiel R galiléen. Donc R' est non galiléen.

Pour décrire le mouvement de ce point, il faut $\theta(t)$.

Le bilan des forces : \vec{T} , $m\vec{G}$, $\vec{f}_{i.e.} = m\Omega^2 H\vec{M}$, $\vec{f}_{i.c.} = -2m\Omega \wedge \vec{v}_r$.

Le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel terrestre R' non galiléen :
 $m\vec{a}_r = \vec{T} + m\vec{G} + m\Omega^2 H\vec{M} - 2m\Omega \wedge \vec{v}_r$

A l'équilibre, \vec{a}_r et \vec{v}_r sont nuls.

$$\vec{T} + m\vec{G} + m\Omega^2 H\vec{M} = \vec{0}$$

$$\text{D'où } \vec{T} = -(m\vec{G} + m\Omega^2 H\vec{M}).$$

Or d'après le principe des actions réciproques, le fil à plomb subit de la part de la masse m une force

$$\vec{T}' = -\vec{T}.$$

$$\text{D'où } \vec{T}' = (m\vec{G} + m\Omega^2 H\vec{M}).$$

Définition :

Le poids \vec{P} d'un objet de masse m est la force subie par le fil à plomb.

La verticale en un point de latitude λ est donnée par la direction du fil à plomb.

Le champ de pesanteur \vec{g} est défini par $\vec{g} = \frac{1}{m}\vec{P} = \vec{G} + \Omega^2 H\vec{M}$.

Où le champ de pesanteur est il maximal? minimal? au pôle 9,8SI, à l'équateur 9,77SI
 A notre latitude, quel est l'angle entre la verticale et la champ de gravitation? angle max $1,7 \cdot 10^{-3} \text{Rad.s}^{-1}$.

8.2.2 Etude du cas dynamique : chute libre et déviation vers l'Est.

Chute libre d'un objet de masse m sans frottement.

1. Faire un bilan des forces.
2. Comparer le module de $\vec{f}_{i.c.}$ au poids.
3. Etudier le mouvement de chute libre à l'ordre 0, en ne considérant que le poids.
4. Etudier le mouvement de chute libre à l'ordre 1, en utilisant pour expression de la vitesse, celle obtenue à l'ordre 0. Evaluer la déviation par rapport à la verticale du point d'impact. Commenter.

Considérons le point M, de masse m dans le référentiel terrestre R'.

R' est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport au référentiel R galiléen. Donc R' est non galiléen.

Pour décrire le mouvement de ce point, il faut $\theta(t)$.

Le bilan des forces : $m\vec{g}$ qui prend en compte à la fois la force de gravitation et la force d'inertie d'entraînement due à la rotation de la terre (caractère non galiléen du référentiel terrestre).

$$\vec{f}_{i.c.} = -2m\Omega \wedge \vec{v}_r.$$

$$\|\vec{f}_{i.c.}\| = 2m\frac{2\pi}{T}1 \ll mg.$$

Donc, a priori, l'effet de la force de Coriolis est faible, voire très faible.

Pour voir apparaître l'effet de cette force, on va recourir à la méthode de calcul que l'on appelle calcul perturbatif.

On va d'abord supposer que la force de Coriolis est négligeable et on va étudier le mouvement de chute libre sous l'effet du poids seul. Ce mouvement est appelé mouvement d'"ordre 0".

Puis, on va considérer la perturbation due à la force de Coriolis, en utilisant les calculs faits à l'ordre 0. On parle alors de calcul à l'"ordre 1".

Ordre 0.

$$z(t) = \frac{1}{2}g_0t^2 + h.$$

Ordre 1.

$$\vec{f}_{i.c.} = -2m\Omega \wedge \vec{v} = -2m(\Omega \cos \lambda \vec{u}_y + \Omega \sin \lambda \vec{u}_x) \wedge (-g_0t\vec{u}_z)$$

$$\vec{f}_{i.c.} = 2mg_0\Omega t \cos \lambda \vec{u}_x.$$

le pfd dans le ref R' non gal devient :

$$m\vec{a} = -mg_0\vec{u}_z + \vec{f}_{i.c.}.$$

La projection suivant \vec{u}_z est inchangée. Soit un temps de chute $\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g_0}}$.

La projection suivant \vec{u}_x donne $m\ddot{x} = 2mg_0\Omega t \cos \lambda$.

$$\text{Finalement } \Delta x = \frac{g_0\Omega \cos \lambda}{3} \left(\frac{2h}{g_0}\right)^{2/3}.$$

A.N. $h=200\text{m}$, $\lambda = 45^\circ$, $\Delta x \simeq 3\text{cm}$ correspondant à une déviation vers l'Est. (\vec{u}_x désigne l'Est).

Expérience de Reich dans une mine. Difficilement visible.

8.2.3 Autre manifestation de la force de Coriolis.

Le pendule de Foucault.

Décrire qualitativement l'effet de la force de Coriolis sur le pendule ?

Plus mouvement plan, tourne autour de la verticale.

Le sens de rotation des dépressions dans l'hémisphère nord n'est pas le même que dans l'hémisphère sud, à cause de la force de Coriolis. (cf. mécanique des fluides deuxième année).

Mais l'eau dans un évier, cela ne marche pas. La force de Coriolis est trop faible pour faire tourner l'eau dans un évier dans un sens ou dans un autre...

8.2.4 Caractère galiléen approché du référentiel terrestre.

Dans le référentiel terrestre, l'influence de la force d'inertie d'entraînement est comprise dans le champ de pesanteur.

Les manifestations du caractère non galiléen de ce référentiel passent donc par la force d'inertie de Coriolis.

Or nous avons vu que la force d'inertie de Coriolis était une force de module faible. Donc en se limitant aux expériences usuelles qui ne durent que peu de temps comparées à 24h et sur lesquelles on ne cherche pas une grande précision, on peut considérer avec une très bonne approximation le référentiel terrestre comme galiléen.

Chapitre 9

Systeme de deux points materiels.

Tout ce que nous avons jusqu'alors, a été fait pour un système ponctuel, pour un point. Comment se réexpriment les divers théorèmes vu pour un système non ponctuel. Nous allons donc nous intéresser au système non ponctuel le plus simple : système composé de deux points matériels. Cette partie prépare la mécanique des systèmes matériels de seconde année.

9.1 Description du système : étude cinématique.

Considérons deux points M_1 , de masse m_1 et M_2 , de masse m_2 .
Quelle grandeur pensez vous à introduire ?

9.1.1 Centre de masse.

Considérons le système (S) composé deux points M_1 , de masse m_1 et M_2 , de masse m_2 .
Notons $m = m_1 + m_2$ la masse totale du système.

Définition :

Le centre de masse, aussi appelé centre d'inertie ou centre de gravité, du système (S) est le point noté G, barycentre de (M_1, m_1) et (M_2, m_2) :

$$(m_1 + m_2)\vec{OG} = m_1\vec{OM}_1 + m_2\vec{OM}_2. \text{ (vrai } \forall O)$$

$$m_1\vec{GM}_1 + m_2\vec{GM}_2 = \vec{0}.$$

Quelles sont les grandeurs utilisées pour étudier un système ponctuel ?

Quantité de Mouvement, Moment cinétique.

9.1.2 Quantité de mouvement.

Définition :

La quantité de mouvement du système (S) \vec{p} par rapport au référentiel R est la somme des quantités de mouvement par rapport au référentiel R de la particule 1 et de la particule, 2 qui constituent le système (S).

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2.$$

Propriété :

La quantité de mouvement du système (S) \vec{p} par rapport au référentiel R est égale à la quantité de mouvement du point matériel G , le centre d'inertie du système, de masse m , la masse totale du système.

$$\vec{p} = m\vec{v}_G.$$

Démonstration : différence $(m_1 + m_2)\vec{OG} = m_1\vec{OM}_1 + m_2\vec{OM}_2$ dans le référentiel R.

9.1.3 Moment cinétique.

Définition :

La moment cinétique du système (S) calculé en A, \vec{L}_A par rapport au référentiel R est la somme des moment cinétique calculé en A par rapport au référentiel R de la particule 1 et de la particule, 2 qui constituent le système (S).

$$\vec{L}_A = \vec{L}_A(M_1) + \vec{L}_A(M_2).$$

9.1.4 Etude énergétique.

Energie cinétique.

Définition :

L'énergie cinétique du système (S) E_C par rapport au référentiel R est la somme des énergies cinétiques par rapport au référentiel R de la particule 1 et de la particule, 2 qui constituent le système (S).

$$E_C = E_C(M_1) + E_C(M_2).$$

Energie potentielle.

Considérons le cas où la particule 1 et 2 interagissent entre elles.

D'après le théorème des actions réciproques : $\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{f}_{2 \rightarrow 1}$, Schéma.

Supposons en outre que cette force dérive d'une énergie potentielle E_P .

Définition :

L'énergie d'interaction du système est l'énergie potentielle E_P dont dérive la force d'interaction entre les particules.

Attention :

$E_P \neq E_P(M_1) + E_P(M_2)$, cela reviendrait à compter deux fois l'interaction.

Propriété de l'énergie potentielle d'interaction :

De part les symétries du système, la force et donc l'énergie potentielle d'interaction ne dépend que de la distance M_1M_2 entre les deux points constituant le système (S).

9.2 Référentiel barycentrique.

Nous avons vu l'intérêt que présentait le centre de masse G du système pour l'étude de la quantité de mouvement.

Le centre de masse permet aussi de simplifier l'étude dynamique, d'où l'idée d'introduire un nouveau référentiel.

9.2.1 Définition.

Définition :

Considérons un référentiel R.

Le référentiel barycentrique ou référentiel du centre de masse, noté R^* , est par définition le référentiel en translation par rapport à R de vecteur \vec{OG} .

Conséquence :

1. G est fixe dans le référentiel R^* .
2. la vitesse d'entraînement de R^* par rapport à R est \vec{v}_G .

9.2.2 Quantité de mouvement dans le référentiel R^* .

Proposition :

La quantité de mouvement du système (S) aussi appelé résultante dynamique de (S) \vec{p}^* par rapport au référentiel R^* est nulle.

Démonstration : \vec{v}_{G^*} est nulle, car G est immobile dans R^* .

Conséquence :

$$\vec{p}^* = \vec{p}_1^* + \vec{p}_2^* = \vec{0} \text{ donc } \vec{p}_1^* = -\vec{p}_2^*.$$

9.2.3 Moment cinétique dans le référentiel R^* .

Proposition :

La moment cinétique du système (S) calculé en A, \vec{L}_A^* par rapport au référentiel R^* est indépendante du point de calcul A.

$$\vec{L}_A^* = \vec{L}_G^* = \vec{L}^*.$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \vec{L}_A^* &= \vec{L}_A^*(M_1) + \vec{L}_A^*(M_2) = A\vec{M}_1 \wedge \vec{p}_1^* + A\vec{M}_2 \wedge \vec{p}_2^*. \\ \vec{L}_A^* &= G\vec{M}_1 \wedge \vec{p}_1^* + G\vec{M}_2 \wedge \vec{p}_2^* + \vec{AG} \wedge (\vec{p}_1^* + \vec{p}_2^*). \end{aligned}$$

Théorème de Koenig.

La moment cinétique du système (S) calculé en A, \vec{L}_A par rapport au référentiel R est la somme du moment cinétique du système (S), \vec{L}^* par rapport au référentiel R^* et du moment cinétique du centre de gravité G doté de la masse totale du système m.

$$\vec{L}_A = \vec{L}^* + \vec{AG} \wedge m\vec{v}_G.$$

Démonstration :

$$\vec{L}_A = \vec{L}_A(M_1) + \vec{L}_A(M_2) = A\vec{M}_1 \wedge \vec{p}_1 + A\vec{M}_2 \wedge \vec{p}_2.$$

Or la composition des vitesses donne $\vec{v}_1 = \vec{v}_G + \vec{v}_1^*$, de même pour la particule 2.

$$\vec{L}_A = \vec{L}_A^* + \vec{AG} \wedge (\vec{p}_1^* + \vec{p}_2^*).$$

9.2.4 Etude énergie dans le référentiel R^* .

Théorème de Koenig.

L'énergie cinétique du système (S), E_C par rapport au référentiel R est la somme l'énergie cinétique du système (S), E_C^* par rapport au référentiel R^* et l'énergie cinétique du centre de gravité G doté de la masse totale du système m.

$$E_C = E_C^* + \frac{1}{2}mv_G^2.$$

Démonstration :

$$E_C = E_C(M_1) + E_C(M_2).$$

En utilisant encore la composition des vitesses.

$$E_C = E_C^* + \frac{1}{2}mv_G^2 + (\vec{p}_1^* + \vec{p}_2^*) \cdot \vec{v}_G.$$

Intérêt de R^* :

D'après les deux théorèmes de Koenig et les propriétés de \vec{p}^* , il est possible d'étudier toutes les propriétés cinétique du système en deux étapes :

1. détermination du mouvement du centre d'inertie G dans R : mouvement d'ensemble
2. détermination du mouvement de (S) dans R^* .

Exemple concret du freesbe (ou de la balle de tennis.)

Mouvement de translation dans R et mouvement de rotation dans R^* .

(Idée importante pour le programme de deuxième année).

9.3 Etude dynamique : Théorèmes de la mécanique appliqué au système (S) non ponctuel .

9.3.1 Théorème de la résultante dynamique.

Considérons le système (S) composé deux points M_1 , de masse m_1 et M_2 , de masse m_2 . M_1 est soumis :

1. à la force extérieure : $\vec{f}_{ext}(M_1)$,
2. et à la force d'interaction de M_2 , qui est une force intérieure au système : $\vec{f}_{int\ 2\rightarrow 1}$.

De même, M_2 est soumis :

1. à la force extérieure : $\vec{f}_{ext}(M_2)$,
2. et à la force d'interaction de M_1 , qui est une force intérieure au système : $\vec{f}_{int\ 1\rightarrow 2} = -\vec{f}_{int\ 2\rightarrow 1}$.

Etude de la quantité de mouvement.

Appliquons le pfd à M_1 dans R_{gal} .

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} \Big|_R = \vec{f}_{ext}(M_1) + \vec{f}_{int\ 2\rightarrow 1}.$$

Appliquons le pfd à M_2 dans R_{gal} .

$$m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} \Big|_R = \vec{f}_{ext}(M_2) + \vec{f}_{int\ 1\rightarrow 2}.$$

$$\text{d'où } m \frac{d\vec{v}_G}{dt} \Big|_R = m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} \Big|_R + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} \Big|_R = \vec{f}_{ext}(M_1) + \vec{f}_{ext}(M_2) + (\vec{f}_{int\ 2\rightarrow 1} + \vec{f}_{int\ 1\rightarrow 2}).$$

Et $\vec{f}_{int} = (\vec{f}_{int\ 2\rightarrow 1} + \vec{f}_{int\ 1\rightarrow 2}) = \vec{0}$ d'après la loi d'action réaction (ou loi des actions réciproques).

Proposition :

La résultante des forces intérieures d'un système est nulle : la résultante des forces ne fait donc intervenir que les forces extérieures.

Théorème de la résultante dynamique. (TRD).

Dans le référentiel galiléen R_{gal} , le mouvement du centre de masse G est celui d'un point matériel doté de la masse totale du système m, et soumis à la résultante des forces extérieures.

$$m \frac{d\vec{v}_G}{dt} \Big|_{R_{gal}} = \sum \vec{f}_{ext}.$$

9.3.2 Théorème du moment cinétique.

Appliquons le TMC en 0 fixe dans R_{gal} à M_1 .

$$m_1 \frac{d\vec{L}_0(M_1)}{dt} \Big|_R = \vec{M}_0(\vec{f}_{ext}(M_1)) + \vec{M}_0(\vec{f}_{int\ 2 \rightarrow 1}).$$

De même à la particule 2.

$$m \frac{d\vec{L}_0}{dt} \Big|_R = \vec{M}_0(\vec{f}_{ext}) + (\vec{M}_0(\vec{f}_{int\ 2 \rightarrow 1}) + \vec{M}_0(\vec{f}_{int\ 1 \rightarrow 2})).$$

Or $\vec{M}_0(\vec{f}_{int\ 2 \rightarrow 1}) + \vec{M}_0(\vec{f}_{int\ 1 \rightarrow 2}) = (O\vec{M}_1 - O\vec{M}_2) \wedge \vec{f}_{int\ 2 \rightarrow 1} = \vec{0}$ car $\vec{f}_{int\ 2 \rightarrow 1}$ et $M_1\vec{M}_2$ sont colinéaires.

Proposition :

Le moment en un point O quelconque, résultant des forces intérieures d'un système, est nul : le moment en un point O des forces ne fait donc intervenir que les forces extérieures, et au besoin les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.

Théorème du moment cinétique.

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} \Big|_R = \vec{M}_0(\vec{f}_{ext})$$

9.3.3 Etude énergétique.

Travail des forces intérieures.

Considérons le cas où la particule 1 et 2 interagissent entre elles.

D'après le théorème des actions réciproques : $\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{f}_{2 \rightarrow 1}$, Schéma.

$$\begin{aligned} P_{int} &= \vec{f}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_2 + \vec{f}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}_1 \\ P_{int} &= \vec{f}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \\ P_{int} &= \vec{f}_{1 \rightarrow 2} \cdot \left(\frac{dM_1\vec{M}_2}{dt} \right) \\ P_{int} &= \vec{f}_{1 \rightarrow 2} \cdot \left(r \frac{d\vec{u}}{dt} + \dot{r}\vec{u} \right) \\ P_{int} &= \vec{f}_{1 \rightarrow 2} \cdot \dot{r}\vec{u} \\ P_{int} &= f_{1 \rightarrow 2} \dot{r} \\ \delta W_{int} &= f_{1 \rightarrow 2} \dot{r} dt = f_{1 \rightarrow 2} dr \end{aligned}$$

Proposition :

la puissance totale des forces intérieures qui est une fonction de la position relative uniquement ne dépend pas du référentiel d'étude.

Deux cas sont à distinguer :

Le système est indéformable : (solide) le travail des forces intérieures est nul. Le cas du solide indéformable ne diffère donc pas du bilan effectué pour un point matériel.

Le système déformable : le travail des forces intérieures est non nul même si la résultante des forces intérieures est nulle.

Intéressons nous au cas du système déformable.

Supposons en outre que cette force d'interaction soit de la forme $f(r)\vec{u}$ et dérive donc d'une énergie potentielle E_P tel que $f(r) = -\frac{dE_P}{dr}$.

$$\delta W_{int} = f_{1 \rightarrow 2} \dot{r} dt = f_{1 \rightarrow 2} dr = -\frac{dE_P}{dr} dr = -dE_P.$$

Définition :

L'énergie d'interaction du système est l'énergie potentielle E_P dont dérive la force d'interaction entre les particules.

Attention :

$E_P \neq E_P(M_1) + E_P(M_2)$, cela reviendrait à compter deux fois l'interaction.

Théorème énergétique.

Enoncé, démonstration.

Bilan.

Dans le TRD et le TMC pour le système n'interviennent que les forces extérieures. Les actions des forces intérieures se compensent.

Dans le théorème de l'énergie cinétique et le théorème de l'énergie mécanique, il faut tenir compte des forces extérieures et des forces intérieures.

9.4 Système isolé de deux points matériels. Réduction canonique.

9.4.1 Position du problème.

Considérons le système (S) composé deux points M_1 , de masse m_1 et M_2 , de masse m_2 dans le référentiel R galiléen.

Dans cette partie, on étudie le mouvement de ce système en le supposant isolé : i.e. $\vec{f}_{ext} = \vec{0}$. Les seules forces sont donc les forces intérieures que l'on suppose dépendre uniquement de la distance r $\vec{f}_{int} = \vec{f}_{2 \rightarrow 1} = -\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = f(r)\vec{u}$.

G désigne le centre de gravité du système $\vec{OG} = \frac{m_1 \vec{OM}_1 + m_2 \vec{OM}_2}{m_1 + m_2}$.
 R^* désigne le référentiel géocentrique.

9.4.2 Premier intérêt du référentiel barycentrique : R^* est galiléen.

TRD dans le ref R gal donne $\vec{v}_G = c\vec{ste}$.

Cq 1 : la quantité de mouvement du système est une cste.

Cq 2 : R^* est en translation rectiligne uniforme par rapport à R galiléen donc R^* galiléen.

9.4.3 Loi de conservation dans le référentiel barycentrique.

Conservation du moment cinétique barycentrique.

TMC en G fixe dans le référentiel R^* galiléen donne :

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}_{*G}}{dt} &= G\vec{M}_2 \wedge \vec{f}_{1 \rightarrow 2} + G\vec{M}_1 \wedge \vec{f}_{2 \rightarrow 1} \\ \frac{d\vec{L}_{*G}}{dt} &= (G\vec{M}_2 - G\vec{M}_1) \wedge \vec{f}_{2 \rightarrow 1} = \vec{0}\end{aligned}$$

Cq : le moment cinétique barycentrique d'un système isolé \vec{L}^* reste constant au cours du temps, sa valeur est fixée par les conditions initiales.

Conservation de l'énergie mécanique barycentrique.

$$E_M^* = E_C^* + E_P^* = cste.$$

Cq : l'énergie mécanique barycentrique d'un système isolé E_M^* reste constant au cours du temps, sa valeur est fixée par les conditions initiales.

9.4.4 Etude du mouvement dans le référentiel barycentrique : réduction canonique.

Définition du point réduit.

Ce que l'on souhaite étudier au cours du temps, outre le mouvement d'ensemble décrit par le mouvement du centre de gravité déjà étudié, c'est le mouvement relatif des deux points : i.e. l'évolution de $M_1\vec{M}_2 = r\vec{u}$.

Etudions donc $\frac{dM_1\vec{M}_2}{dt} = \vec{v} \frac{dM_1\vec{M}_2}{dt} = \frac{dG\vec{M}_2}{dt} - \frac{dG\vec{M}_1}{dt}$

$$\begin{aligned}\frac{dM_1\vec{M}_2}{dt} &= \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \\ \frac{dM_1\vec{M}_2}{dt} &= \vec{v}_2^* - \vec{v}_1^* \text{ par formule de changement de référentiel.}\end{aligned}$$

Or le pfd dans R^* galiléen donne $m_2 \frac{d\vec{v}_2^*}{dt} = \vec{f}_{1 \rightarrow 2}$
 et $m_1 \frac{d\vec{v}_1^*}{dt} = \vec{f}_{2 \rightarrow 1}$

D'où $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2 M_1 \vec{M}_2}{dt^2} = \vec{f}_{1 \rightarrow 2}$
 cette équation est l'analogie de l'équation du mouvement d'un point de vitesse \vec{v} la vitesse relative et de masse μ la masse réduite.

Théorème de réduction canonique du problème à deux corps.
 Le mouvement relatif de la masse m_1 et m_2 qui constituent le système est équivalent au mouvement

dans le référentiel barycentrique R^* d'un point M appelé "point réduit" ou "point équivalent" de caractéristique suivante :

- de masse réduite $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$
- de position $G\vec{M} = M_1\vec{M}_2 = \vec{r}$
- soumis à la force vraie $\vec{f}_{1 \rightarrow 2}$.

Etude du mouvement relatif à l'aide du point réduit.

Connaissant le mouvement du point réduit, on peut remonter au mouvement de M_1 et de M_2 .
On connaît les relations suivantes :

$$m_1 G\vec{M}_1 + m_2 G\vec{M}_2 = \vec{0} \quad (1)$$

$$G\vec{M} = G\vec{M}_2 - G\vec{M}_1 \quad (2)$$

$$\text{D'où } G\vec{M}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} G\vec{M}$$

$$\text{et } G\vec{M}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} G\vec{M}$$

Etude du mouvement du point réduit.

Etude du moment cinétique. $v^*_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}$
et $v^*_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}$

$$\text{d'où } \vec{L}^*_G = \mu \vec{r} \wedge \vec{v}.$$

Le Théorème du moment cinétique appliquée en G fixe dans R^* galiléen donne :

$$\frac{d\vec{L}^*}{dt} = G\vec{M} \wedge \vec{f}_{1 \rightarrow 2} = \vec{0}$$

Le point réduit est soumis à une force centrale. Donc son moment cinétique se conserve (redémonstration d'un résultat obtenu plus tôt.)

Donc le mouvement est plan.

Donc la loi des aires est vérifiées.

Etude de l'énergie mécanique. $E_C^* = \frac{1}{2} m v^{*2}$.

Comme la force est conservative, on fait apparaître l'énergie potentielle efficace.

Conclusion : Pour étudier le mouvement relatif, il faut et il suffit d'étudier le mouvement du point réduit.

9.5 Exercices.

9.5.1 Deux masses reliés par un ressort.

On considère deux palets autoporteurs, identiques, de masse m , reliés par un ressort (k, l_0) sur une table horizontale. On néglige les forces de frottement fluide.

O désigne le point milieu des deux masses et initialement, à $t=0$, les masses sont telles que : $O\vec{M}_1(t=0) = \frac{-l_0-D}{2}\vec{u}_x$, $O\vec{M}_2(t=0) = \frac{-l_0+D}{2}\vec{u}_x$, $\vec{v}_1(t=0) = \vec{0}$, $\vec{v}_2(t=0) = \vec{0}$.

1. Décrire sans aucun calcul quel mouvement vous attendez.
2. En considérant le système des deux masses, faire un bilan des forces. Justifier en particulier l'absence de frottement solide.
3. Que dire du mouvement d'ensemble, le mouvement du centre de masse G , du système ?
4. Etudier le mouvement relatif des masses.

Réponse : 3. G reste immobile, confondu avec O . 4. PFD ou étude énergétique $x(t) = l_0 + D \cos(\sqrt{\frac{2k}{m}}t)$ puis étude de $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

9.5.2 Pendule et masse.

Deux masses m_1 et m_2 supposées ponctuelles sont reliées par une barre de longueur l , de masse négligeable; le dispositif est celui de la figure 1b.

1. En considérant le système composé des deux masses, faire une remarque sur la direction des forces s'appliquant au système.
2. En déduire un lien entre les inconnues cinématiques.
3. Simplifier cette relation dans le cas des petites oscillations.
4. Compte tenu du résultat ci dessus, quelle méthode de résolution est adaptée à l'étude du mouvement ?
5. Déterminer la période des petites oscillations.

Réponse : 1. Pas de composante sur \vec{u}_x 2. $\dot{x} = -\frac{m_2 l \cos \theta}{m_1 + m_2} \dot{\theta}$ 3. $\dot{x} \simeq -\frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \dot{\theta}$ 4. Énergétique

5. $T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 l}{(m_1 + m_2)g}}$ homogène

9.5.3 Masses, ressort et plan incliné : un problème à deux corps qui n'en est pas un...

Deux masses m_1 et m_2 supposées ponctuelles sont reliées par un fil de longueur l , et le dispositif est celui de la figure 1a.

1. A priori, quel type de mouvement attendez vous ?
2. Etablir une condition pour que la masse m_2 tombe si on supprime le ressort.
3. Cette condition est maintenant supposée vérifiée, déterminer la position d'équilibre de la masse m_1 et m_2 .
4. Quelle méthode proposeriez vous pour étudier le mouvement des masses m_1 et m_2 ? Justifier soigneusement votre réponse et préciser clairement le système.
5. Donner la période T des oscillations.

Indication : il faut appliquer le PFD à chacune des masses sans considérer le système globale dans un premier temps.

Réponse : 1. Oscillations. 2. $m_2 > m_1 \sin \alpha$ 3. Energétique car ... 4. $T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}}$